ランダウ=リフシッツ理論物理学教程

相対論的量子力学

2

イェ・リフシッツ
エリ・ピタエフスキー 著
井上健男 訳

東京図書株式会社

Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Часть 2

Издательство «НАУКА»
Москва 1971

まえがき

本書は，(われわれおよびヴェ・ベ・ベレステツキーが一緒に書いた) 第1巻の直接の延長である．したがって章および節の番号はそれにつながっている．

初めの三つの章は輻射補正の理論が述べられ，それで量子電気力学の記述は終る．ここでわれわれは，使われる方法の原理的基礎を強調するだけでなく，技術的に重要な点はその詳細を明らかにすることに努めた．したがって具体的な計算についてかなりの程度に詳しく述べた．

エリ・デ・ランダウの初めの計画にしたがって，この「理論物理学教程」には，理論的結果のなかから信頼性が十分に確立され，一定の体系に納められるようなものだけを述べる必要がある．言いかえれば，理論物理学の《極限》にあまり近寄りすぎた記述は許されない．当然のことながら，弱い相互作用および強い相互作用の理論のような領域では，この規範の適用は現在のところ特別のむずかしさがある．断片的な個々の報告の記述は，このような領域に特別の興味をもつ人にとっては有用かもしれないが，他の人にとっては興味がないかもしれない．こういう考えから出発して，われわれは本書を小さくすることにした．すなわち強い相互作用の力学的対称性と弱い相互作用の《現象論的》理論に限ることにした．このような制限のときにも，この本の内容が十分広い読者に有益であることをわれわれは期待している．

この教程の他の巻におけると同様に，この本でも参考文献の引用は，いかなる段階でも完全を期したのではなく，また最初の仕事であることを示す性質のものでもない．この本の記述の限界からいくらかはみ出してはいるが，それに近い資料を与えることのみがその目的である．ただ本書の取り扱っている分野の特殊性が，このような引用を困難かつあいまいにしているのである．

この教程の他の巻の引用はつぎの記号で行なわれる．すなわち，I（《力学》1965），II（《場の古典論》1967），III（《量子力学》1963）である．

われわれは，この本を通読して数々の有益な注意をいただいたベ・エリ・ヨッフェおよ

びイ・エス・シャピロにここでわれわれの感謝を捧げたい．またヤ・イ・アジモフおよびア・ア・ヴァルフォロメーエフのいくつかの助言にも感謝したい．弱い相互作用の理論の記述に当たってエリ・ベ・オクーニの有名な著書から教えられるところが多かった．

1969年8月

イェ・エム・リフシッツ

エリ・ペ・ピタエフスキー

第2巻の目次

第1巻の目次

第11章　正確な伝播関数と頂点部分

§99. ハイゼンベルク表示の場の演算子

電気力学の種々の具体的過程の考察に当たって，これまでは摂動論の最初の0でない近似に限ってきた．これからは，より高次の近似の考察の際に現われる効果を調べることにしよう．これらの効果は**輻射補正**と呼ばれる．

正確な（すなわち e^2 についての冪展開ではない）散乱振幅がもついくつかの一般的性質をあらかじめ研究しておくと，高次近似の構造をいっそう深く理解することができる．すでに(§73)，摂動展開の各項は相互作用表示の場の演算子を使って表わされることを見てきた．この演算子の時間依存性は自由粒子系のハミルトニアン H_0 により決定される．正確な散乱振幅は，この表示ではなくハイゼンベルク表示を使って表わした方がずっと便利である．この表示では，時間依存性は相互作用をする粒子系の正確なハミルトニアン $\mathrm{H}=\mathrm{H}_0+\mathrm{V}$ により決定される．

一般則にしたがい，ハイゼンベルク演算子をつくると

$$\psi(x)\equiv\psi(t,\boldsymbol{r})=e^{i\mathrm{H}t}\psi(\boldsymbol{r})e^{-i\mathrm{H}t} \tag{99.1}$$

となる．$\bar{\psi}(x)$ および $A(x)$ に対しても同様である．ここで $\psi(\boldsymbol{r})$ は，時間によらない（シュレーディンガー）演算子である[1]．まず，強調することは同時刻のハイゼンベルク演算子は，シュレーディンガー表示あるいは相互作用表示の演算子と同じ交換則を満足することである．たとえば

$$\{\psi_i(t,\boldsymbol{r})\bar{\psi}_k(t,\boldsymbol{r}')\}_+=e^{i\mathrm{H}t}\{\psi_i(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}')\}_+e^{-i\mathrm{H}t}=\gamma^0_{ik}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{99.2}$$

が成り立つ((76.6) 参照)．同様に，演算子 $\psi(t,\boldsymbol{r})$ と $A(t,\boldsymbol{r}')$ とは交換する．

$$\{\psi_i(t,\boldsymbol{r})A(t,\boldsymbol{r}')\}_-=0$$

（異なる時刻では，けっしてこうはならない！）．

1) この章では，時間引数をもつ演算子はハイゼンベルク表示のものである．相互作用表示の演算子は，さらに余分の添字 相互 によって区別することにする．

ハイゼンベルクの ϕ－演算子が満足する《運動方程式》は，一般公式 III (13.7) にしたがって得られる．

$$-i\frac{\partial\phi(x)}{\partial t}=\mathrm{H}\,\phi(x)-\phi(x)\,\mathrm{H}. \qquad (99.3)$$

ハミルトニアンに対しては，シュレーディンガー表示もハイゼンベルク表示も同様である．このときハミルトニアンは両方の表示の場の演算子を使って，同じ形に表わされる．今の場合，(99.3) の右辺の計算の際に，ハミルトニアン中の演算子 $\mathrm{A}(x)$（自由な電磁場のハミルトニアン）にのみ依存する部分を落とすことができる．なぜかというと，この部分は $\phi(x)$ と可換であるからである．(21.13) と (43.3) にしたがって

$$\begin{aligned}\mathrm{H}&=\int\phi^*(t,\boldsymbol{r})(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}+\beta m)\phi(t,\boldsymbol{r})\,d^3x\\&\qquad+e\int\bar{\phi}(t,\boldsymbol{r})\,\hat{\mathrm{A}}(t,\boldsymbol{r})\,\phi(t,\boldsymbol{r})\,d^3x\\&=\int\bar{\phi}(t,\boldsymbol{r})\{\gamma\mathrm{p}+m+e\hat{\mathrm{A}}(t,\boldsymbol{r})\}\,\phi(t,\boldsymbol{r})\,d^3x\end{aligned} \qquad (99.4)$$

を得る．(99.2) を使って，交換関係 $\{\mathrm{H}\,\phi(t,\boldsymbol{r})\}_-$ を計算し，d^3x について積分することによって δ－関数を消去して

$$(\hat{\mathrm{p}}-e\hat{\mathrm{A}}-m)\,\phi(t,\boldsymbol{r})=0 \qquad (99.5)$$

を得る．当然予期されるように，演算子 $\phi(t,\boldsymbol{r})$ は形式的にディラックの方程式と一致する方程式を満足する．

電磁場の演算子 $\mathrm{A}(t,\boldsymbol{r})$ に対する方程式は，古典的な場合との対応からすでに明らかである．この場合（占有数が大きい．§5 参照）の条件のもとでは，場の状態について平均したあとで，演算子方程式はポテンシャルに対する古典的マクスウェル方程式 II (30.2) に移行するはずである．したがって，演算子に対する方程式はマクスウェル方程式と形が一致することは明らかである．すなわち（任意のゲージで）

$$\partial^\nu\partial_\mu\mathrm{A}^\mu(x)-\partial^\mu\partial_\mu\mathrm{A}^\nu(x)=-4\pi\,e\mathrm{j}^\nu(x) \qquad (99.6)$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{j}^\nu(x)=\bar{\phi}(x)\gamma^\nu\phi(x)$ は電流演算子で，恒等的に連続方程式

$$\partial_\nu\mathrm{j}^\nu(x)=0 \qquad (99.7)$$

を満足する[1]．

大事なことは，方程式 (99.6) が A^μ および j^μ に関して線型で，したがってこれらの

1）自由な電磁波に対応する演算子 $\mathrm{A}^\mu_{\text{相互}}(x)$ は，右辺が 0 の方程式

$$\partial^\nu\partial_\mu\mathrm{A}^\mu_{\text{相互}}(x)-\partial^\mu\partial_\mu\mathrm{A}^\nu_{\text{相互}}(x)=0 \qquad (99.6\,\mathrm{a})$$

を満足する．

演算子を並べる順序に関する問題は起こらないことである．

波動関数に関する類似の方程式と同様に，演算子方程式の組 (99.6)，(99.7) はゲージ変換

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu \chi(x), \quad \phi(x) \to \phi(x) e^{ie\chi}, \quad \bar{\phi}(x) \to \bar{\phi}(x) e^{-ie\chi} \qquad (99.8)$$

に対して不変である．ここで $\chi(x)$ は，(同時刻では) ϕ と可換な任意の実演算子である[1]．

今度は，ハイゼンベルク表示の演算子と，相互作用表示の演算子とのあいだの関係を求めよう．考察を簡単にするために，(最終結果には影響しない) 形式的な仮定をすると便利である．それは，相互作用 $V(t)$ が $t = -\infty$ から有限の時間までのあいだに断熱的に《挿入される》というものである．このとき $t = -\infty$ では両方の表示，すなわちハイゼンベルク表示および相互作用表示が一致している．それに対応する状態波動関数 Φ および $\Phi_{\text{相互}}$ も一致している．

$$\Phi_{\text{相互}}(t = -\infty) = \Phi. \qquad (99.9)$$

他方，ハイゼンベルク表示の波動関数は一般に時間に依存しない (すべての時間依存性は演算子に負わせている)．しかし相互作用表示では，波動関数の時間依存性に対しては (73.7) にしたがって

$$\Phi_{\text{相互}}(t) = S(t, -\infty)\Phi_{\text{相互}}(-\infty) \qquad (99.10)$$

を得る．ここで

$$S(t_2, t_1) = T \exp\left\{-i\int_{t_1}^{t_2} V(t')\,dt'\right\} \qquad (99.11)$$

である[2]．(99.10) を (99.9) とくらべて，関係式

$$\Phi_{\text{相互}}(t) = S(t, -\infty)\Phi \qquad (99.12)$$

を得る．これは両方の表示の波動関数のあいだの関係を与えるものである．これにしたがって，演算子の変換公式は

$$\begin{aligned}\phi(t, \mathbf{r}) &= S^{-1}(t, -\infty)\phi_{\text{相互}}(t, \mathbf{r})S(t, -\infty)\\ &= S(-\infty, t)\phi_{\text{相互}}(t, \mathbf{r})S(t, -\infty)\end{aligned} \qquad (99.13)$$

である ($\bar{\phi}$ および A に対しても同じである)．

最後にいま一つ一般的な注意をしよう．相対論的な量子論では，場の演算子の物理的な

1) ここではハイゼンベルクの ϕ-演算子のことを言っていることを強調しよう．相互作用演算子では，電磁場のポテンシャルのゲージ変換は一般に ϕ-演算子には関係しない．

2) S の自明の性質を指摘しよう．

$$S(t, t_1)S(t_1, t_0) = S(t, t_0), \quad S(t, t_0)S(t_0, t) = 1. \qquad (99.11\,a)$$

意味は無限大の零点振動によって非常に制限されたものになることを，何回となく示してきた．これはハイゼンベルク表示の演算子に対して特に言えることである．それはそれ自体のなかに相互作用と結びついたもう一つの発散を含んでいる．この章の §99～§106 は形式的理論の記述にあてられているが，そこではこれらの無限大を消去する問題は考察されない．それらがあたかも有限であるかのようにして，すべての量に作用するようにしている．このようにして得られた結果は，主として見通しを与える価値がある．それによって，摂動論展開の意味を非常に明確にすることができるようになる．また，それらが現在ある困難から解放された将来の理論にも何らかの形で残されることも可能である[1)]．

§100. 正確な光子伝播関数

正確な（e^2 の冪展開でない）理論の道具のなかで，正確な伝播関数の概念が，一番重要な役割を果たしている[2)]．

正確な光子伝播関数（筆記体の文字 $\mathcal{D}$ と置こう）は次式で定義される．

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|\mathrm{T}\mathrm{A}_\mu(x)\mathrm{A}_\nu(x')|0\rangle. \tag{100.1}$$

ここで $\mathrm{A}_\mu(x)$ はハイゼンベルク演算子であり，(77.1) の定義

$$D_{\mu\nu}(x-x') = i\langle 0|\mathrm{T}\mathrm{A}_\mu^{相互}(x)\mathrm{A}_\nu^{相互}(x')|0\rangle \tag{100.2}$$

と異なっている．ここでは相互作用表示の演算子が現われている．正確な伝播関数（100.1）と区別して，関数（100.2）は**自由光子の伝播関数**と呼ぶことができる．

(100.1) の平均値の正確な計算ができないので，$\mathcal{D}_{\mu\nu}$ に対する正確な解析的表式を得ることはできない．しかし (100.1) の定義があるので，この関数のいくつかの一般的性質を打ち立てることができる．§108 がそのためにあてられている．それまでは図形手法を使った摂動論により $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ の計算をすることにしよう．このためには $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ を相互作用表示の演算子を使っても表わす必要がある．

初めに $t>t'$ としよう．$\mathrm{A}(x)$ と $\mathrm{A}_{相互}(x)$ とのあいだの関係 ((99.13) 参照) を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') &= i\langle 0|\mathrm{A}_\mu(x)\mathrm{A}_\nu(x')|0\rangle \\ &= i\langle 0|\mathrm{S}(-\infty,t)\mathrm{A}_\mu^{相互}(x)\mathrm{S}(t,-\infty)\mathrm{S}(-\infty,t')\mathrm{A}_\nu^{相互}(x')\mathrm{S}(t',-\infty)|0\rangle\end{aligned}$$

と書こう．(99.11 a) にしたがってつぎのように置き換える．

---

1) 最後に，ここで発展させられた数学的方法は量子統計物理学への応用のなかにも現われる．そこでは場の理論に特有の発散は一般には起こらない．

2) これらの概念はダイソン (F. Dyson, 1949) が初めて導入した．この章で説明されるすべての手法はすべて彼が組み立てたものである．

$$\mathrm{S}(t,-\infty)\mathrm{S}(-\infty,t')=\mathrm{S}(t,t'),\quad \mathrm{S}(-\infty,t)=\mathrm{S}(-\infty,+\infty)\mathrm{S}(\infty,t).$$

そうすると

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x')=i\langle 0|\mathrm{S}^{-1}[\mathrm{S}(\infty,t)\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)\mathrm{S}(t,t')\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')\mathrm{S}(t',-\infty)]|0\rangle \quad (100.3)$$

となる．ここで簡単のために

$$\mathrm{S}\equiv\mathrm{S}(+\infty,-\infty) \quad (100.4)$$

と置く．定義 (99.11) によって $\mathrm{S}(t_2,t_1)$ は t_1 と t_2 のあいだの時間の，経時的に並べられた演算子のみを含んでいるので，(100.3) の角括弧のなかのすべての演算子因子は，左から右にいくにしたがって時間が減るような順序に配列されていることは明らかである．括弧の前に経時記号 T を置き，その後は因子の順序を勝手に動かしてよい．それは演算子 T がそれらを自動的に必要な順序にしてくれるからである．これらを使って括弧をつぎの形に書き直そう．

$$[\cdots]=\mathrm{T}[\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')\mathrm{S}(\infty,t)\mathrm{S}(t,t')\mathrm{S}(t',-\infty)]$$
$$=\mathrm{T}[\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')\mathrm{S}].$$

このようにして

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x')=i\langle 0|\mathrm{S}^{-1}\mathrm{T}[\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')\mathrm{S}]|0\rangle \quad (100.5)$$

となる．同様にして，この公式が $t<t'$ のときにも成り立つことを確かめることができる．

今度は，真空での平均の記号のなかから，因子 S^{-1} を適当な位相因子の形で取り出すことができることを示そう．そのためには，ハイゼンベルクの波動関数 Φ が，相互作用表示での同じ状態の波動関数の値 $\Phi_{相互}(-\infty)$ と一致することを思い起こそう ((99.9) 参照)．(73.8) にしたがって

$$\mathrm{S}\Phi_{相互}(-\infty)\equiv\mathrm{S}(+\infty,-\infty)\Phi_{相互}(-\infty)=\Phi_{相互}(+\infty)$$

となる．しかし真空は厳密な定常状態である．そこでは粒子の自発生成過程はどんなものも不可能である．つまり，時間がたっても，真空は真空のままである．これは $\Phi_{相互}(+\infty)$ と $\Phi_{相互}(-\infty)$ との違いは位相因子 $e^{i\alpha}$ だけであることを意味している．したがって

$$\mathrm{S}\Phi_{相互}(-\infty)=e^{i\alpha}\Phi_{相互}(-\infty)=\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle\Phi_{相互}(-\infty). \quad (100.6)$$

あるいは，複素共役をとり，演算子 S のユニタリー性を考慮して

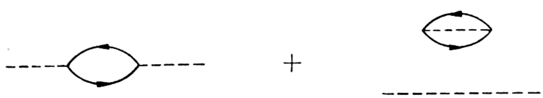
$$\Phi^{*}_{相互}(-\infty)\mathrm{S}^{-1}=\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle^{-1}\Phi^{*}_{相互}(-\infty)$$

を得る．これから容易に，(100.5) はつぎの形に書き直すことができる．

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') = i\frac{\langle 0|\mathrm{T}\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')\mathrm{S}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle}. \qquad (100.7)$$

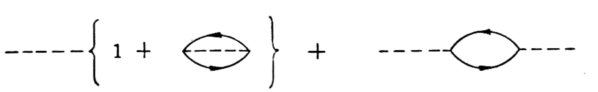
ここで（分子および分母で）S に対する展開 (73.10) を代入し，ヴィックの定理 (§78) を使って平均を行ない $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ の e^2 についての冪展開を得る．

(100.7) の分子では，平均される式と §78 で考察された (78.1) の型の行列要素との違いはつぎの点だけである．光子の生成および消滅の《外部》演算子の代りに，そこには演算子 $\mathrm{A}_{\mu}^{相互}(x)$ および $\mathrm{A}_{\nu}^{相互}(x')$ が現われる点である．平均される積のすべての因子は経時記号のあとに現われるから，これらの演算子と《内部》演算子 $\mathrm{A}^{相互}(x_1)$, $\mathrm{A}^{相互}(x_2)$, … とを対にした縮約は，光子の伝播関数 $D_{\mu\nu}$ を与える．このようにして平均の結果は，§78 に記載された規則にしたがって組み立てられた 2 本の外端をもつ図形の総和で表わされる．ただ異なるのは，図形の（内線と同様に）光子外線が今は（現実の光子の振幅 e の代りに）伝播関数 $D_{\mu\nu}$ に対応する点だけである．ゼロ近似では $\mathrm{S}=1$ で，(100.7) の分子は単に $D_{\mu\nu}(x-x')$ と一致するだけである． 0 と異なるつぎの項は $\sim e^2$ である． それらは二つの外端と二つの頂点をもつ図形の総和である．



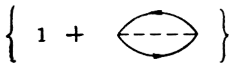
a) b) (100.8)

これらの図形のなかの 2 番目のものは，離れた二つの部分から成っている．すなわち，破線（これは $-iD_{\mu\nu}$ に対応する）と閉じた環である．図形のこのような分解は，それらに対応する解析式の二つの独立因子への分解に対応する．図形 (100.8) にゼロ近似の図形（破線）を付け加え，《括弧の外へくり出して》，2 次の項までの精度では (100.7) の分子が

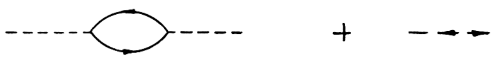


に等しいという結果を得る．

(100.7) の分母の式 $\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle$ は，真空から真空への《遷移》振幅そのものである．したがってその展開は，まったく外端のない図形だけを含んでいる．ゼロ近似では $\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle = 1$ である．しかし 2 次の項までの精度では



になる．分子を分母で割ると，これと同じ精度で波括弧が約された

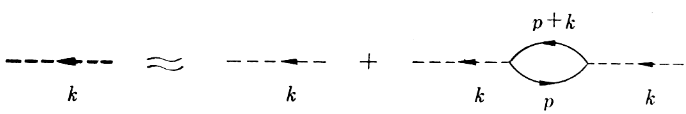


が残ることがわかる．

このようにして，離れた環をもつ図形は答から落ちてしまう．この結果は一般性をもっている．(100.7) の分子および分母に対応する図形のつくり方をよく考えてみると，つぎのことを容易に理解することができる．分母の $\langle 0|S|0\rangle$ の役割は結局，任意の次数の摂動論で，正確な伝播関数 $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ を互いに離れている部分を含まないような図形だけで表わすようにすることである．

外端のない図形（閉じた環）は一般には物理的意味をもたない．伝播関数 $\mathscr{D}$ をつくるときにそれが落ちることとは無関係に，それは考慮する必要はない．実際にこのような環自体，真空－真空の遷移に対する S－行列の対角要素の輻射補正である．しかし (100.6) にしたがって，これらの環の総和は（ゼロ近似の 1 とともに）重要でない位相因子を与えるだけであり，これはいかなる物理的結果にも影響しない．

座標表示から運動量表示への移行は普通どおり行なわれる．したがって，2次の摂動で伝播関数 $-i\mathscr{D}_{\mu\nu}(k)$（われわれはこれを太い破線のグラフで表わそう）はつぎの和で与えられる．



(100.9)

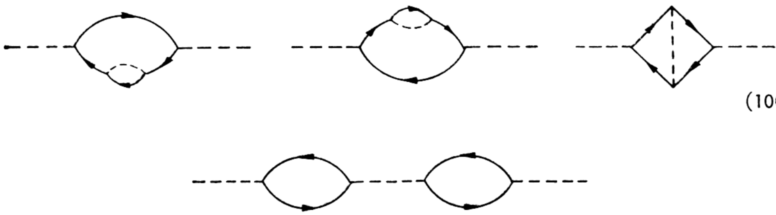
ここで，すべての図形は（§78 に列挙されている）普通の規則にしたがって計算されている．ただ違う点は内線と同様光子外線に因子 $-iD_{\mu\nu}(k)$ が対応させられることである．したがって，この公式を解析的に書くと

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(k) \approx D_{\mu\nu}(k) + ie^2 D_{\mu\lambda}(k)\int \mathrm{Sp}\,\gamma^\lambda G(p+k)\gamma^\rho G(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4}D_{\rho\nu}(k) \qquad (100.10)$$

になる[1]（行列 γ および G の双スピノール添字は，いつものように書かない）．

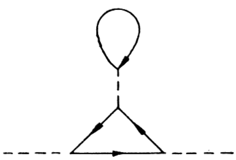
1）符号を決めるときは，閉じた電子環によってもち込まれる因子 -1 を忘れないこと！

つぎの近似の項も同様につくられる．それは二つの光子外端と，必要数の頂点をもつ図形の総和である．したがって $\sim e^4$ の項は，四つの頂点をもつつぎの図形に対応する．



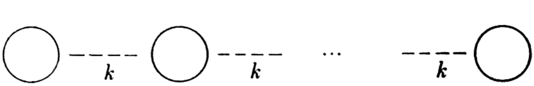
(100.11)

図形



もまた四つの頂点をもっている．この図形の上の部分は一つの《それ自身で閉じた》電子線を形成している[1]．このような環は縮約 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$，すなわち電流値の真空での単なる平均 $\langle 0|j(x)|0\rangle$ に対応する．しかし真空の定義だけから，この量は恒等的に0になる必要がある．もちろんこの恒等式は，この環に対するこれ以上のいかなる輻射補正によっても変わらない[2]．したがって，《それ自身で閉じた》電子線を伴うどんな図形も一般にいかなる近似においても考慮する必要はない．

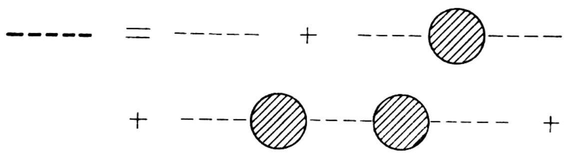
二つの光子線（外線でも内線でも）のあいだのまとまった図形の部分（《ブロック》）を，一般に**光子の自己エネルギー部分**と呼ぶ．一般に，このようなブロック自身がさらに，1本の光子線で互いに結びつけられている部分に分けられる．すなわち



の形の構造をもっている．ここで円はこれ以上どんな方法でも分割できないブロックを表わしている．このような部分を**コンパクト**と呼ぶ（すなわち，4個の4次の自己エネルギー部分（100.11）のなかで初めの三つはコンパクトである）．

1) 図形（100.8, b）の環とは違っている．それは二つの異なる電子線からつくられている．
2) とはいえ図形にしたがった直接の計算は発散積分に導くことはある．

すべての（無限個の）コンパクトな自由エネルギー部分の和を，記号 $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ で表わそう．関数 $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ を**偏りの演算子**と呼ぶ．図形をそれに含まれるコンパクトな部分の数によって分類すると，正確な伝播関数 $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ をつぎの級数の形に表わすことができる．



ここで斜線を施した円のおのおのには $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ が置かれる．解析的にこの級数はつぎの形に書かれる．

$$\mathcal{D} = D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \cdots$$

$$= D\left\{1 + \frac{\mathcal{P}}{4\pi}\left[D + D\frac{\mathcal{P}}{4\pi}D + \cdots\right]\right\} \qquad (100.12)$$

（テンソル添字は簡単のために落とした）．そして角括弧のなかの級数が，ふたたび $\mathcal{D}$ に対する級数と一致している．したがって

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda}(k)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\rho}(k)}{4\pi}\mathcal{D}_{\rho\nu}(k) \qquad (100.13)$$

を得る．この等式に左から逆テンソル $(D^{-1})^{\tau\mu}$ を，右から $(\mathcal{D}^{-1})^{\nu\sigma}$ を掛け（添字の付け方を変えて），これと同等な形を得る．

$$\mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu} = D^{-1}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}_{\mu\nu}. \qquad (100.14)$$

ここで，$\mathcal{D}$ を (100.12) の形に表わすことは暗々裡につぎの了解があることを強調しておこう．それは，図形は，図形手法の一般則にしたがって計算される，より簡単なブロックに分けることができ，これらのブロックどうしを結合して全体としての図形の正しい式が得られることである．このような分割がゆるされるのは，図形手法の（けっしてつまらぬことではない）重要な特性である．これは，図形のなかの共通な数係数が，その順序によらないことと関係がある．

この性質があるために，関数 $\mathcal{D}$（が知られていると仮定して）を使って，種々の散乱過程の振幅に対する輻射補正の計算を簡単にすることができる．すなわち，光子内線に対する種々の補正の図形を毎回あらたに考察する代りに，ただ単にこれらの線を太い線に置き換えるだけでよい．すなわち，それらに（D の代りに）必要な近似までとった伝播関

数 $\mathscr{D}$ を対応させればよい。

もしも光子線が（仮想的でない）現実の光子に対応するならば，すなわちそれが全体の図形の外端に現われるならば，それにすべての自己エネルギーの補正を入れたあとで，いわゆる**有効外線**が得られる．これにはつぎのような式が対応する．その式は (100.13) と異なって因子 D を現実の光子の偏った振幅で置き換えてある．すなわち

$$e_\mu + \mathscr{D}_{\mu\rho}(k)\frac{\mathscr{P}^{\rho\lambda}(k)}{4\pi}e_\lambda \tag{100.15}$$

である．もしも外場の線を問題にするならば，e_μ の代りにここでは $A_\mu^{(e)}$ と書く必要がある．

近似的な伝播関数 $D_{\mu\nu}$ のテンソル構造およびゲージの不定性に関して，§77 で述べられたことはすべて正確な関数 $\mathscr{D}_{\mu\nu}$ についても成立する．この関数の相対論的不変な形式の枠内で，それをつぎのような一般形に書くことにしよう．

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(k) = \mathscr{D}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \mathscr{D}^{(l)}(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{100.16}$$

第1項はランダウ・ゲージに対応する，また第2項では $\mathscr{D}^{(l)}$ はゲージ任意関数である．近似された伝播関数の同様な表式は

$$D_{\mu\nu}(k) = D(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + D^{(l)}(k^2)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{100.17}$$

となる[1]．

ここで，伝播関数の縦波部分は物理的意味をもたない 4－ポテンシャルの縦波部分と関係があり，相互作用にはあずからないことを思い起こそう．したがって相互作用はそれを変えない．したがって

$$\mathscr{D}^{(l)}(k^2) = D^{(l)}(k^2) \tag{100.18}$$

でなければならない．

定義により，逆テンソルは方程式

$$\mathscr{D}^{-1}_{\mu\nu}\mathscr{D}^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu, \quad D^{-1}_{\mu\nu}D^{\lambda\nu} = \delta^\lambda_\mu$$

を満足しなければならない．正方テンソル (100.16) あるいは (100.17) に対して，(100.18) を考慮して逆テンソルはつぎの形になる．

---

1) この式中の定義 $D^{(l)}$ は (77.3) のなかの定義と一致しない．

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{\mathscr{D}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2},$$

$$D_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{D}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{D^{(l)}}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

これらの公式から，偏りの演算子 $\mathscr{P}_{\mu\nu}$ が横波テンソルであることが導かれる．すなわち

$$\mathscr{P}_{\mu\nu} = \mathscr{P}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{100.19}$$

である．ここで $\mathscr{P} = k^2 - 4\pi/\mathscr{D}$，あるいは

$$\mathscr{D}(k^2) = \frac{4\pi}{k^2\left(1 - \dfrac{\mathscr{P}(k^2)}{k^2}\right)} \tag{100.20}$$

である．

このようにして，偏りの演算子は（光子伝播関数そのものと違って）ゲージ不変量である．

§ 101. 光子の自己エネルギー関数

光子の伝播関数の解析的性質をさらに調べるために，偏りの演算子とともに，いま一つの補助的関数 $\Pi_{\mu\nu}(k)$ を導入するのが有効である．これは**光子の自己エネルギー関数**と呼ばれるものである．すなわち，$i\Pi_{\mu\nu}/4\pi$ は（コンパクトなものだけでない）すべての一般的な自己エネルギー型の光子部の和として定義される．これらの和を図形では四角形で描き，正確な伝播関数をつぎのように表わそう．



すなわち

$$\mathscr{D}_{\mu\nu} = D_{\mu\nu} + D_{\mu\lambda}\frac{\Pi^{\lambda\rho}}{4\pi}D_{\rho\nu}. \tag{101.1}$$

これから $\Pi_{\mu\nu}$ をつぎの形に表わす

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^{-1}\mathscr{D}^{\lambda\rho}D_{\rho\nu}^{-1} - D_{\mu\nu}^{-1}.$$

そしてここに（100.16）～（100.18）を代入し，ついで（100.20）を代入して

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right), \quad \Pi = \frac{\mathscr{P}}{1 - \mathscr{P}/k^2} \tag{101.2}$$

を得る．$\Pi_{\mu\nu}$ は（$\mathcal{P}_{\mu\nu}$ と同様に）ゲージ不変テンソルであることがわかる．

$\Pi_{\mu\nu}$ の有効性はその座標表示にある．それはつぎのことに気付けば容易に求められる．等式

$$\frac{1}{4\pi}\Pi_{\mu\nu}(k)=D^{-1}_{\mu\lambda}D^{-1}_{\rho\nu}\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(k)-D^{\lambda\rho}(k)\}$$

は，(100.18) から出てくるテンソル $\mathcal{D}^{\lambda\rho}(k)-\mathcal{D}^{\lambda\rho}(k)$ の横波性を考慮して，座標表示でつぎのように書くことができる．

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x')$$
$$=\frac{1}{4\pi}(\partial_\mu\partial_\lambda-g_{\mu\lambda}\partial_\sigma\partial^\sigma)(\partial'_\nu\partial'_\rho-g_{\nu\rho}\partial'_\sigma\partial'^\sigma)\{\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x')-D^{\lambda\rho}(x-x')\}.$$

微分するために，ここで

$$\mathcal{D}^{\lambda\rho}(x-x')-D^{\lambda\rho}(x-x')$$
$$=i\langle 0|\mathrm{TA}^\lambda(x)\mathrm{A}^\rho(x')-\mathrm{TA}^\lambda_{\text{相互}}(x)\mathrm{A}^\rho_{\text{相互}}(x')|0\rangle \qquad (101.3)$$

を代入する必要がある．§76 で，一般に T－積の微分はその不連続性のために慎重に行なう必要があることを見てきた．しかしながら，(101.3) のなかで平均される差は，1次微係数とともに連続である．それは演算子 $\mathrm{A}^\lambda(x)$ と $\mathrm{A}^\lambda_{\text{相互}}(x)$ の（同一時刻の）成分の交換則は同じで，その不連続が落ちてしまうからである（§76 参照）．したがって，差 (101.3) の微分は記号 T のなかで行なうことができる．(99.6) および (99.6 a) にしたがって，結局求める式

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x')=4\pi ie^2\langle 0|\mathrm{Tj}_\mu(x)\mathrm{j}_\nu(x')|0\rangle \qquad (101.4)$$

を得る．これは $\Pi_{\mu\nu}$ のゲージ不変性をあらわな形で示している．なぜかというと電流演算子がゲージ不変だからである．

(101.4) からこの関数の重要な積分表示を得ることができる．

(101.2) を考慮すると，スカラー関数 $\Pi=\Pi^\mu_\mu/3$ を考察するだけで十分である．座標表示では

$$\Pi(x-x')=\frac{4\pi}{3}ie^2\langle 0|\mathrm{Tj}_\mu(x)\mathrm{j}^\mu(x')|0\rangle$$
$$=\frac{4\pi}{3}ie^2\begin{cases}\sum_n\langle 0|\mathrm{j}_\mu(x)|n\rangle\langle n|\mathrm{j}^\mu(x')|0\rangle & (t>t' \text{ のとき})\\ \sum_n\langle 0|\mathrm{j}_\mu(x')|n\rangle\langle n|\mathrm{j}^\mu(x)|0\rangle & (t<t' \text{ のとき})\end{cases} \qquad (101.5)$$

である．ここで記号 n は（電磁場＋電子－陽電子場の）系の状態である[1]．電流演算子 $\mathrm{j}(x)$ は $x^\mu=(t,\boldsymbol{r})$ に依存するから，その行列要素もまた x に依存する．もしも，状態 $|n\rangle$ として全4－運動量が一定値をもつ状態を選べば，この依存性をあらわな形につくることができる．

電流の行列要素の時間依存性は，すべてのハイゼンベルク演算子に対するものと同様に次式で与えられる．

$$\langle n|\mathrm{j}^\mu(t,\boldsymbol{r})|m\rangle=\langle n|\mathrm{j}^\mu(\boldsymbol{r})|m\rangle e^{-i(E_m-E_n)t}.$$

ここで E_n，E_m は状態 $|n\rangle$ および $|m\rangle$ のエネルギーで，$\mathrm{j}(\boldsymbol{r})$ はシュレーディンガー演算子である．

行列要素の座標依存性を決めるために演算子 $\mathrm{j}(\boldsymbol{r})$ を考察しよう．これは演算子 $\mathrm{j}(0)$ を距離 $\boldsymbol{r}$ の平行移動によって変換した結果である．このような移動の演算子は $\exp(i\boldsymbol{r}\mathbf{P})$ である．ここで $\mathbf{P}$ は系の全運動量の演算子である（III，§15，問題1参照）．行列要素の変換の一般則を考えて（III（12.7）参照）

$$\langle n|\mathrm{j}^\mu(\boldsymbol{r})|m\rangle=\langle n|e^{-i\boldsymbol{r}\mathbf{P}}\mathrm{j}^\mu(0)e^{i\boldsymbol{r}\mathbf{P}}|m\rangle=\langle n|\mathrm{j}^\mu(0)|m\rangle e^{i(\boldsymbol{P}_m-\boldsymbol{P}_n)\boldsymbol{r}}$$

を得る．前式と一緒にしてこれは最終式

$$\langle n|\mathrm{j}^\mu(t,\boldsymbol{r})|m\rangle=\langle n|\mathrm{j}^\mu(0)|m\rangle e^{-i(P_m-P_n)x} \tag{101.6}$$

を与える．また，行列 $\langle n|\mathrm{j}^\mu(0)|m\rangle$ はエルミートである（行列（101.6）と同様に演算子 $\mathrm{j}^\mu(t,\boldsymbol{r})$ も全体としてエルミートである）．そして連続方程式（99.7）があるので，それはまた横波条件

$$(P_n-P_m)^\mu\langle n|\mathrm{j}_\mu(0)|m\rangle=0 \tag{101.7}$$

を満足する．

関数 $\Pi(x-x')$ の計算にもどろう．（101.6）を（101.5）に代入して

$$\Pi(\xi)=\frac{4\pi ie^2}{3}\sum_n\langle 0|\mathrm{j}_\mu(0)|n\rangle\langle n|\mathrm{j}^\mu(0)|0\rangle e^{\mp iP_n\xi}\qquad(\tau\gtrless 0\text{ のとき}) \tag{101.8}$$

となる．ここで $x-x'=\xi=(\tau,\boldsymbol{\xi})$ である．

$$\rho(k^2)=-\frac{4\pi e^2}{3}(2\pi)^3\sum_n\langle 0|\mathrm{j}_\mu(0)|n\rangle\langle 0|\mathrm{j}^\mu(0)|n\rangle^*\delta^{(4)}(k-P_n) \tag{101.9}$$

と置こう．和は，4－運動量 $k=(\omega,\boldsymbol{k})(\omega>0)$ をもつ仮想的光子により生成される可能性のある現実の電子対および光子の系について行なわれる．そしてこのような系のおのお

1) 電流演算子は電荷を保存する．したがって．真空 $|0\rangle$ と結びつく状態 $|n\rangle$ は，同数の電子と陽電子のみを含むことができる．

のに対してはさらにその内部変数（重心系での粒子の偏りや運動量）についても行なわれる[1]．このような和の結果，関数 ρ はただ k にのみ，そしてそのスカラー性のためにただ k^2 にのみ依存することができる．特に ρ は $\boldsymbol{k}$ の方向には依存しない．関数 ρ のこれらの性質を考慮して，(101.8) をつぎの形に書き変えよう．

$$\Pi(\xi) = -i\int_0^\infty d\omega \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\rho(k^2)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}-i\omega|\tau|}$$
$$= -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int d\omega\, d(\mu^2)\,\delta(\mu^2-k^2)\,\rho(\mu^2)\,e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}-i\omega|\tau|}.$$

運動量表示への移行は，これに公式

$$e^{-i\omega|\tau|} = 2i\omega\int_{-\infty}^\infty e^{-ik_0\tau}\frac{1}{k_0^2-\omega^2+i0}\frac{dk_0}{2\pi} \qquad (101.10)$$

を代入することによって行なわれ（§77，350 頁参照）

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty d(\mu^2)\int_0^\infty d(\omega^2)\,\delta(\mu^2+\boldsymbol{k}^2-\omega^2)\frac{\rho(\mu^2)}{k_0^2-\omega^2+i0},$$

あるいは最終的に

$$\Pi(k^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(\mu^2)\,d\mu^2}{k^2-\mu^2+i0} \qquad (101.11)$$

となる．

この積分表示のなかの関数 ρ は関数 $\Pi(k^2)$ の**スペクトル密度**と呼ばれる．つぎの性質がある．

$$\rho(k^2) = 0 \qquad (k^2<0\ \text{のとき}),$$
$$\rho(k^2) > 0 \qquad (k^2>0\ \text{のとき}). \qquad (101.12)$$

実際に，現実の粒子系を生成することができる仮想光子の 4－運動量 k は，確かに時間類似 (k^2 はその重心系では粒子の全エネルギーの平方と一致する) である．横波条件 (101.7) のために

$$P_n^\mu\langle 0|\mathrm{j}_\mu(0)|n\rangle = 0$$

である．しかし 4－ベクトル $\langle 0|\mathrm{j}|n\rangle$ は時間類似 4－ベクトル (P_n) に直交し，空間類似である．すなわち

$$\langle 0|\mathrm{j}_\mu(0)|n\rangle\langle 0|\mathrm{j}^\mu(0)|n\rangle^* < 0$$

である．したがって，定義 (101.9) によって $\rho>0$ である．

---

1) 状態 $|n\rangle$ のこのような定義は，それを荷電寄の演算子の行列要素 $\langle 0|\mathrm{j}|n\rangle$ が 0 と異なるような状態として定義するのと同じことは明らかである．

§102. 正確な電子伝播関数

光子のと同様に，正確な電子伝播関数は公式

$$\mathcal{G}_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)\bar{\psi}_k(x')|0\rangle \tag{102.1}$$

(i, k は双スピノール添字) によって定義され，自由粒子の伝播関数の定義 (76.1)

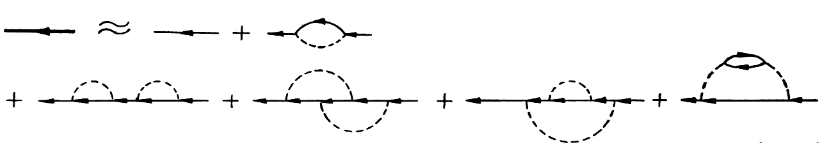
$$G_{ik}(x-x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{相互}(x)\bar{\psi}_k^{相互}(x')|0\rangle \tag{102.2}$$

とは違って相互作用表示の ψ－演算子をハイゼルベルク表示の ψ－演算子に置き換えてある．

(100.7) を導くときと同じ考察から，$\mathcal{G}_{ik}$ を

$$\mathcal{G}_{ik}(x-x') = -i\frac{\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{相互}(x)\bar{\psi}_k^{相互}(x')\mathrm{S}|0\rangle}{\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle} \tag{102.3}$$

に書き変えることができる．この式の e^2 の冪展開は，$\mathcal{G}$ 関数を二つの電子外線と何個かの頂点をもつ図形の和の形に表わすことになる．このとき (102.3) の分母の役割はふたたび，離れた《真空の環》のない図形のみを考慮する必要があるということに帰着する．したがって，$\sim e^4$ の項までの精度では，伝播関数 $\mathcal{G}$（太い線）の図形表示はつぎの形になる[1]．



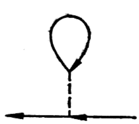
(102.4)

太い実線には（運動量表示での）関数 $i\mathcal{G}(p)$ があてがわれ，自由粒子の伝播関数 iG および $-iD$ がそれぞれ等式の右辺の実線と破線にあてがわれる．

二つの電子線のあいだで閉じているブロックは，**電子の自己エネルギー部分**と呼ばれる．光子の場合と同様に，このような部分は，その一本の電子線を切ることによって二つの別々の自己エネルギー部分に分割することができなければ，コンパクトであるという．

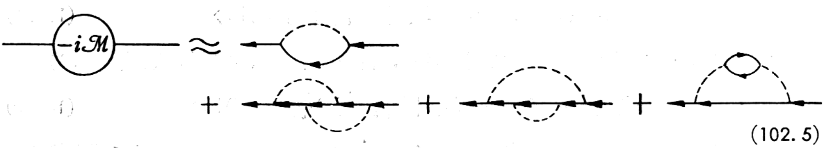
---

1) すでに §100 で明らかにしたように，2次ですでに現われたような《それ自身で閉じた》線の図形，すなわち



もまた考慮する必要はない．

可能なすべてのコンパクトな部分の和を記号 $-i\mathcal{M}_{ik}$ で表わそう．関数 $\mathcal{M}_{ik}(p)$ を**質量演算子**と呼ぶ．したがって，$\sim e^4$ の項までの精度で



(102.5)

となる．和をとることにより，(100.13) の導き方と同様な精度で

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p)\mathcal{M}(p)\mathcal{G}(p) \tag{102.6}$$

を得る（双スピノール添字は落とした）．あるいは逆行列に対して

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{M}(p) = \hat{p} - m - \mathcal{M}(p) \tag{102.7}$$

を得る．

§99 ですでに注意したように，ハイゼンベルクの ψ－演算子は（相互作用表示の ψ－演算子と違って）電磁場のポテンシャルのゲージ変換の結果，変化を受ける．それとともに，正確な電子伝播関数 $\mathcal{G}$ もまたゲージ不変ではない．これのゲージ変換の法則を明らかにしよう（Л. Д. Ландау, И. М. Халатников, 1952）．

ゲージ変換の際の $\mathcal{G}$ の変化は $D^{(l)}$ を使って表わす必要があることは前からわかっていた．これはこの変換の際に正確な光子伝播関数に付け加えられる量である．このことは，摂動論の図形による $\mathcal{G}$ の計算の際，級数の各項は関数 D を使って表わされ，他の電磁場の量はそのなかに現われないことに気付けば明らかなことである．この事情は結論を簡単にするために使うことができる．すなわち，変換 (99.8) のなかの任意演算子 χ の性質について任意の特殊な仮定をすることができる．それは結果が $D^{(l)}$ を使って表わされるようなものでありさえすればよい．

変換 (99.8) の結果，伝播関数 $\mathcal{D}$ (100.1) および $\mathcal{G}$ (102.1) はつぎのようになる．

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu} &\longrightarrow i\langle 0|\mathrm{T}[\mathrm{A}_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x)][\mathrm{A}_\nu(x') - \partial'_\nu\chi(x')]|0\rangle, \\ \mathcal{G}_{ik} &\longrightarrow -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x)e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}\bar{\psi}_k(x')|0\rangle. \end{aligned} \tag{102.8}$$

演算子 χ がヴィックの定理を満足すること，つまりそれらの積は T－積中の他の演算子と関係なく対ごとに平均されると考えよう．ゲージ不変性のために《場》χ は相互作用になんらの寄与もしないので，この仮定はまったく自然なものである．そこでまた演算子 χ 自体の真空での平均も 0 になると仮定しよう．すなわち $\langle 0|\chi|0\rangle = 0$ である．このと

き (102.8) で χ を含む項は分離されて，次式が得られる．

$$\mathscr{D}_{\mu\nu} \longrightarrow \mathscr{D}_{\mu\nu} + i\langle 0|\mathrm{T}\partial_\mu \chi(x)\cdot\partial'_\nu \chi(x')|0\rangle, \tag{102.9}$$

$$\mathscr{G}_{ik} \longrightarrow \mathscr{G}_{ik}\langle 0|\mathrm{T}e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}|0\rangle. \tag{102.10}$$

これらの変換中の第一のものはつぎの形に書くことができる．

$$\mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') \longrightarrow \mathscr{D}_{\mu\nu}(x-x') + \partial_\mu\partial'_\nu d^{(l)}(x-x'). \tag{102.11}$$

ここで

$$d^{(l)}(x-x') = i\langle 0|\mathrm{T}\chi(x)\chi(x')|0\rangle \tag{102.12}$$

である[1]．これから，$d^{(l)}$ がゲージ変換の際の光子伝播関数 $\mathscr{D}^{(l)}$ の縦波部分の変化を決定することがわかる．

さて，量

$$B \equiv \langle 0|\mathrm{T}\,e^{ie\chi(x)}e^{-ie\chi(x')}|0\rangle \tag{102.13}$$

を e の冪に展開し，ヴィックの定理にしたがって平均して，展開の各項を $d^{(l)}$ を使って表わすことができる．この計算は，もしもこの結果が演算子 $\chi(x)$ および $\chi(x')$ の非可換性に関係がないはずであることに気づけば，非常に簡単になる．事実，それらの交換は，もちろん偶関数である $d^{(l)}(x-x')$ のなかで，引数 x と x' の交換になるだけである[2]．$\chi(x)$ と $\chi(x')$ との可換性の仮定のもとに，(102.13) のなかの指数演算子因子の掛け算は，その指数部の加算になる（そして，経時化の記号を落とすことができる）．

$$B = \langle 0|e^{i\varphi}|0\rangle, \quad \varphi = e[\chi(x)-\chi(x')].$$

この式の展開で奇数次の項は平均の結果 0 になる．したがって

$$B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\langle 0|\varphi^{2n}|0\rangle$$

が残る．さらに

$$\langle 0|\varphi^{2n}|0\rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!}\langle 0|\varphi^2|0\rangle$$

---

1) もしも関数 $d^{(l)}$ およびその時間微分が $t=t'$ において連続ならば，(102.9) から (102.11) への移行は可能である．そうでない場合には，これらの式の右辺は δ-関数の項だけ異なるはずである（公式 (76.2) の導き方参照）．運動量空間ではこの条件は，$|g^2|\to\infty$ のときに $d^{(l)}(g)$ が $1/g^2$ 則よりも急速に減少するという仮定と同等であるる．

2) $\chi(x)$ と $\chi(x')$ との交換の性質が，結局関数 $d^{(l)}(x-x')$ 自体の形に対して重要である．これに関連してつぎのことを強調しておこう．演算子 $\chi(x)$ に対して (102.9) の形を仮定するとわれわれはそのことにより，時空間の一様性を破らないような，すなわち $\mathscr{D}$ がただ差 $x-x'$ だけに依存するようにするような（一般のまったく任意の変換の場合には，この性質は破られる）ゲージ変換だけを考慮することになる．

が成り立つ．右辺の係数は，$2n$ 個の演算子 φ のあいだで可能な異なる縮約対の数（すなわち，$2n$ 個の番号つきの点を二つずつ結びつける可能なやり方の数）である[1]．これから

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\langle 0|\varphi^2|0\rangle\right)^n = \exp\frac{\langle 0|\varphi^2|0\rangle}{2}.$$

最後に

$$\langle 0|\varphi^2|0\rangle = -e^2\langle 0|\chi^2(x)+\chi^2(x')-2\chi(x)\chi(x')|0\rangle$$
$$= 2ie^2[d^{(l)}(0)-d^{(l)}(x-x')]$$

を考慮して，$\mathcal{D}$ が (102.11) にしたがって変換されるときの $\mathcal{G}$ の変換は最終的な式を得る．

$$\mathcal{G}(x-x') \longrightarrow \mathcal{G}(x-x')\exp\{ie^2[d^{(l)}(0)-d^{(l)}(x-x')]\}. \tag{102.14}$$

この式は伝播関数の座標表示に関するものである．一般の場合に，これはフーリエ成分に移ることはできない．すなわち，伝播関数 $\mathcal{D}(p)$ の変化を使って，運動量表示で伝播関数 $\mathcal{G}(p)$ の変化を表わすことはできない．しかし，このような移行は無限小ゲージ変換に対しては可能である．わかりやすくするために，この場合 $d^{(l)}$ を $\delta d^{(l)}$ と書き，(102.14) から関数 $\mathcal{G}$ の変化に対して

$$\delta\mathcal{G}(x-x') = ie^2\mathcal{G}(x-x')[\delta d^{(l)}(0)-\delta d^{(l)}(x-x')] \tag{102.15}$$

を得る．フーリエ成分では[2]

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\delta d^{(l)}(q)[\mathcal{G}(p)-\mathcal{G}(p-q)]. \tag{102.16}$$

ここで $\delta d^{(l)}(q)$ と関数 $\mathcal{D}^{(l)}$ の変化とは

$$\delta\mathcal{D}^{(l)}(q) = q^2\delta d^{(l)}(q) \tag{102.17}$$

---

1) 実際，ある平均方法を選ぶことにしよう．もしも今，点のすべての可能な交換を行なったとすると，$(2n)!$ 個の項を得る．しかしながら，それらのなかに余分なものがある．第一に，対のなかの点の交換はなんら新しい縮約の方法へは導かない．これは 2^n である．第二に対ごとの交換もなんら意味がない．これが $n!$ ある．$(2n)!$ を 2^n と $n!$ で割ると本文に示した数を得る．

2) もしも関数 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ とすれば，そのフーリエ成分は

$$f(p) = \int f(x)e^{ipx}d^4x = \iiint d^4x\frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^8}e^{ix(p-q_1-q_2)}f_1(q_1)f_2(q_2)$$
$$= \int\frac{d^4q_1d^4q_2}{(2\pi)^4}\delta^{(4)}(p-q_1-q_2)f_1(q_1)f_2(q_2) = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}f_1(q)f_2(p-q).$$

(102.15) から (102.16) に移るときに

$$f(x=0) = \int f(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

もまた考慮した．

によって結ばれる.

電子伝播関数に対しても，(101.11) と類似の積分表示が得られるはずである．その導き方は，電流の行列要素に対して §101 で用いられた式 (101.6) と同様な ψ の行列要素の式

$$\psi_{nm}(x) = \psi_{nm}(0)\, e^{-i(P_m - P_n)x} \qquad (102.18)$$

に基礎を置いている．しかしながら，電流とは違って ψ－演算子自体はゲージ不変ではない．(102.18) の形の座標依存性は一般性をもたず，ただ特定のゲージでのみ成り立つものである．したがって，(102.18) に基づいた演算子の積分表示は，その特定のゲージでのみ成立する．この場合のより深い物理的原因は，光子の質量が 0 に等しいことが赤外破局 (§95) に導くことである．このために，電子は相互作用の過程で無限個の軟光子を放出する．これが《1 粒子》伝播関数 (102.1) の直接の意味をまったく奪ってしまうことになる．

§103. 頂点演算子

複雑な図形では，自己エネルギー部とともに，それに帰せられない別の形のブロックもまた分離することができる．一つの 4－ベクトル添字と二つの双スピノール添字をもつ関数

$$K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|\mathrm{T}A^{\mu}(x_1)\psi_i(x_2)\bar{\psi}_k(x_3)|0\rangle \qquad (103.1)$$

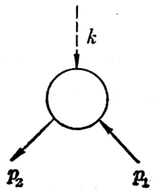
を考察することにより，われわれはこのようなブロックの重要なカテゴリーに到達する．時空間の一様性のために，これは引数 x_1，x_2，x_3 の差にのみ依存する．相互作用表示の演算子を使って表わされた関数 K はつぎの形になる．

$$K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\langle 0|\mathrm{T}A^{\mu}_{\text{相互}}(x_1)\psi^{\text{相互}}_i(x_2)\bar{\psi}^{\text{相互}}_k(x_3)S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \qquad (103.2)$$

運動量表示への移行は，次式のように行なわれる．

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + k - p_2)K^{\mu}_{ik}(p_2, p_1;\, k)$$
$$= \iiint K^{\mu}_{ik}(x_1, x_2, x_3)\, e^{-ikx_1 + ip_2x_2 - ip_1x_3}\, d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3. \qquad (103.3)$$

図形手法では，関数 K^{μ}_{ik} はつぎの形の (**3 端子**) ブロックに対応する．



(103.4)

これは三つの端（一つの光子端と二つの電子端）をもち，それらの運動量は保存則

$$p_1 + k = p_2 \tag{103.5}$$

により結ばれている．

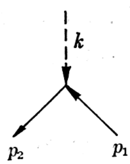
この関数の展開の０次の項は０になる．１次の項は座標表示で

$$K^{\mu}(x_1, x_2, x_3) = e\int G(x_2 - x)\gamma_{\nu}G(x - x_3)\cdot D^{\nu\mu}(x_1 - x)\,d^4x,$$

あるいは運動量表示で（双スピノール添字は落として）

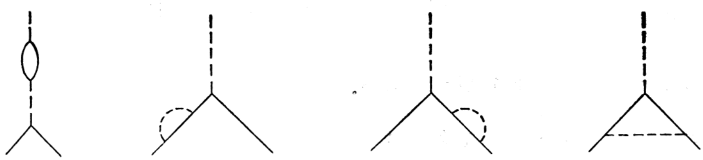
$$K^{\mu}(p_2, p_1;\ k) = eG(p_2)\gamma_{\nu}G(p_1)\cdot D^{\nu\mu}(k). \tag{103.6}$$

これはつぎの図形に対応する．



(103.7)

つぎの近似に進むと，新たに頂点を付け加えるので図形が複雑になる．しかし，これらすべての図形が本質的に新しいものを与えるわけではない．したがって，３次ではつぎの図形が現われる．



(103.8)

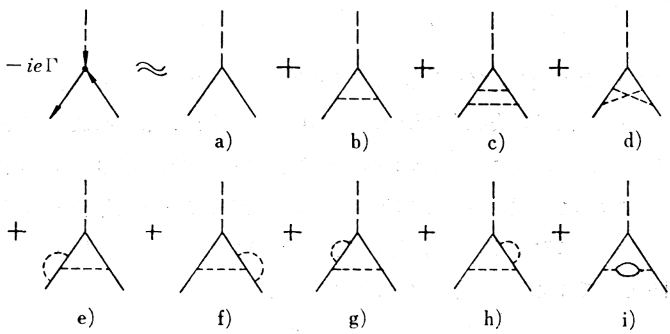
初めの三つは（一つの光子線あるいは電子線で切って）簡単な頂点（103.7）と２次の自己エネルギー部に分けることができる．第四の図形に対しては，このような分割は不可能である．この事情は一般性をもっている．初めの種類の補正は，単に（103.6）のなかで因子 G および D を正確な伝播関数 $\mathcal{G}$ および $\mathcal{D}$ に換えることに帰してしまう．この和のな

かの残りの展開項は，(103.6) のなかで因子 γ^μ の代りに置かれる新しい量へと導いている．この量を Γ^μ と置き，定義にしたがって次式を得る．

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \{i\mathcal{G}(p_2)[-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)]i\mathcal{G}(p_1)\}[-i\mathcal{D}^{\nu\mu}(k)]. \qquad (103.9)$$

図形の他の部分と，1本の光子線および2本の電子線で結ばれているブロックは，もしもこのブロックが1本の（電子あるいは光子）線だけで相互に結ばれているような部分に分割できないならば，**頂点部分**と呼ばれる．Γ^μ という量は，最も簡単な頂点 γ^μ を含むすべての（無限個の）頂点部分の和である．これを**頂点演算子**（あるいは**頂点関数**）と呼ぶことにする．

5次の量までの精度の，頂点演算子のすべての図形を示そう．



(103.10)

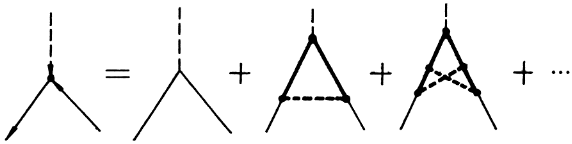
(正確な頂点演算子 $-ie\Gamma$ を，黒い点で表わす)．

演算子 Γ は（単純頂点の演算子 γ と同様に）二つの行列（双スピノール）添字と一つの4－ベクトル添字をもっている．これは二つの電子の運動量 (p_1, p_2) と一つの光子の運動量 (k) の関数である．このとき三つの運動量のすべてが，同時に現実の粒子のものではありえない．図形 (103.4)（もっと複雑な図形の一部としてではなく）それ自体としては，自由電子による光子の吸収に対応するだろう．しかしこのような過程は現実の粒子の4－運動量の保存則とは矛盾する．したがって，図形の三つの端のなかの少なくとも一つは仮想的粒子（あるいは外場）のものでなければならない．

頂点部分はさらに二つのカテゴリーに分けることができる．すなわち，**既約**と**可約**である．内線に自己エネルギーの補正を含まず，また内部頂点に対する（より低い次数の）補正を表わすような部分を分離することができないようなものを既約と呼ぶ．したがって，図形 (103.10) のなかで b) と d) だけが既約である（単純頂点 a) は勘定に入れない）．

図形 g)，h)，i) は自己エネルギー部を含んでいる．図形 c) では上の破線は上の頂点に対する補正とみなすことができる．また図形 e) および f) の横の破線は，横の頂点に対する補正とみなすことができる．

既約図形のなかで内線を太い線に，頂点を黒丸の頂点に換えて（すなわち，近似的な伝播関数 D，G を正確な伝播関数 $\mathscr{D}$，$\mathscr{G}$ に，また近似的な頂点演算子 γ を正確な Γ に換えて)[1]，われわれはすべての一般的な頂点部分の和を得る．このようにして，頂点演算子の展開はつぎの形になる．

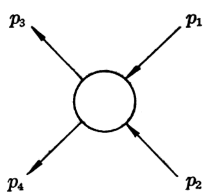


(103. 11)

この等式は Γ に関しては，右辺に無限個の項をもつ積分方程式になっている．

以上述べたことから，任意の数の端をもつ図形ブロックに対する正確な式をつくる一般的原理が明らかになる．それらは，ハイゼンベルク演算子の T－積の真空における平均としてつくられる．すなわち，電子の始めの線のおのおのに対して一つの演算子 $\bar{\psi}(x)$，電子の終りの線のおのおのに対して $\psi(x)$，そして各光子に対して $A(x)$ である．

いま一つの例をもってこよう．つぎの形の図形である．



(103. 12)

これは四つの電子端（《電子４端子》）をもっている．われわれは関数

$$K_{ik,lm}(x_1, x_2;\ x_3, x_4) = \langle 0|\mathrm{T}\psi_i(x_1)\psi_k(x_2)\bar{\psi}_l(x_3)\bar{\psi}_m(x_4)|0\rangle \qquad (103.\ 13)$$

を考察して，上のような図形に到達する（この関数は，もちろん，四つの引数の差にのみ依存する）．このフーリエ成分は

$$\int K_{ik,lm}(x_1, x_2;\ x_3, x_4)\, e^{i(p_3x_1+p_4x_2-p_1x_3-p_2x_4)}\, d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, d^4x_4$$

$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)K_{ik,lm}(p_3, p_4;\ p_1, p_2) \qquad (103.\ 14)$$

の形に書くことができる．ここで

1）このようにして得られた図形を**骨組み**と呼ぶ．

$$K_{ik,lm}(p_3, p_4;\ p_1, p_2)$$
$$= (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 - p_3)\mathcal{G}_{il}(p_1)\mathcal{G}_{km}(p_2) - (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_2 - p_3)\mathcal{G}_{im}(p_1)\mathcal{G}_{kl}(p_2)$$
$$+ \mathcal{G}_{in}(p_3)\mathcal{G}_{kr}(p_4)[-i\Gamma_{nr,st}(p_3, p_4;\ p_1, p_2)]\mathcal{G}_{sl}(p_1)\mathcal{G}_{tm}(p_2) \qquad (103.15)$$

である．最後の式の初めの2項は，関数 $\Gamma(p_3, p_4;\ p_1, p_2)$ の定義からつぎのような図形を除いている．それはおのおの二つの外端をもち，互いにつながっていない二つの部分に分かれるような図形である．すなわち



である．第3項では，因子 $\mathcal{G}$ は Γ の定義から，電子外線に対する補正であるような図形の部分を除いている．

また，フェルミの ψ－演算子の T－積の性質にしたがって，関数 $\Gamma(p_3, p_4;\ p_1, p_2)$ はつぎのような反対称性をもつことを指摘しよう．

$$\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4;\ p_1, p_2) = -\Gamma_{ki,lm}(p_4, p_3;\ p_1, p_2)$$
$$= -\Gamma_{ik,ml}(p_3, p_4;\ p_2, p_1). \qquad (103.16)$$

もしも運動量 p_1, p_2, p_3, p_4 が現実の粒子に対応するならば，分割されない図形 (103.12) は2電子の散乱過程を記述する．われわれは図形の外端に（伝播関数 $\mathcal{G}$ の代りに）粒子の波動振幅をあてがって[1]，この過程の振幅を得る．

$$iM_{fi} = \bar{u}_i(p_3)\bar{u}_k(p_4)\,i\Gamma_{ik,lm}(p_3, p_4;\ p_1, p_2)u_l(p_1)u_m(p_2). \qquad (103.17)$$

(103.16) があるので，この振幅は自動的に電子の交換に関する必要な対称性をもっている．

§104. ダイソンの方程式

正確な伝播関数と頂点部分は，ある積分関係式で互いに結びつけられている．その由来は図形を使う方法では特にはっきりしてくる．

前節で導入された既約性あるいは可約性の概念は，頂点部分に対してのみでなく，任意の他の図形（あるいは部分）にも拡張される．この観点から，コンパクトな自己エネルギ

1) われわれは先へいって（§107），現実の過程の振幅をつくる際に，図形の自由端の自己エネルギー部分を考慮してはいけないことがわかる．

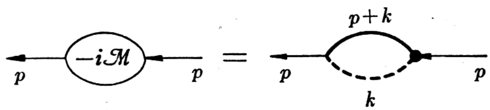
ー型の電子図形を考察しよう．

これらの無数の図形のなかから，ただ一つが既約であることは容易に理解できる．この図形は２次であって



である．この図形のあらゆる複雑化も，その内線（電子線あるいは光子線）あるいはその頂点のなかの一つに対する，高次補正の導入とみなすことができる．この際，大切なことは図形の明確な対称性のために，すべての補正は二つの頂点中の一つにつければ十分なことである[1]．

このようにして，すべての電子のコンパクトな自己エネルギー部のなかで，唯一つだけが既約であるから，すべてのこのような部分の全体（すなわち質量演算子 $\mathcal{M}$）は，唯一つの図形で描かれる．



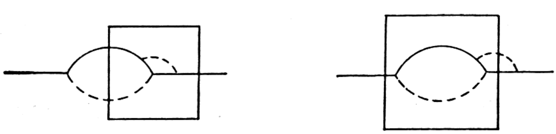
(104.1)

解析的な形に書くと，このグラフの等式は

$$\mathcal{M}(p) = G^{-1}(p) - \mathcal{G}^{-1}(p)$$
$$= -ie^2 \int \gamma^\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu(p+k, p; k) \cdot \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \qquad (104.2)$$

を与える[2]．

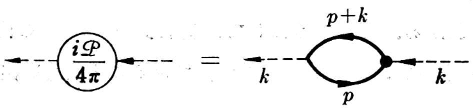
1）事柄をはっきりさせるためにつぎのことを強調しよう．頂点の一つに対してのみ補正を行なって，求める全図形を得るが，特定の図形のおのおのに対して補正ブロックの構造は一般に，頂点中のどれにその補正がつけられるかによって異なっている．たとえば



である．ここで，同一の図形に対して右あるいは左の頂点に関しては，頂点部分の役割を果たすブロックが四角形で囲まれている．

2）もしも（104.1）で正確な頂点部分を左側の頂点につければ，方程式（104.2）で因子 γ と Γ とが置き換えられる．もちろん，方程式の二つの形は本質的には同等である．

同様な式を偏りの演算子 $\mathcal{P}$ に対しても与えることができる．光子のコンパクトな自己エネルギー部のなかでもまた唯一つだけが既約であり，したがって $\mathcal{P}$ もまたただ一つの骨組み図形によって表わされる．



(104.3)

対応する解析的な等式は

$$\frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} = D^{-1}_{\mu\nu}(k) - \mathcal{D}^{-1}_{\mu\nu}(k)$$
$$= ie^2\,\mathrm{Sp}\int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k)\,\Gamma_\nu(p+k, p\,;\,k)\,\mathcal{G}(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{104.4}$$

となる（(104.2) と (104.4) のなかの双スピノール添字は落としてある）．

関係式 (104.2) と (104.4) は**ダイソンの方程式**と呼ばれる．これはまた直接の解析的計算からも得られる．

そこで，(104.2) を導くためにはつぎの量を考察しよう．

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}\mathcal{G}_{lk}(x - x') = -i(\hat{p} - m)_{il}\langle 0|\mathrm{T}\psi_l(x)\bar{\psi}_k(x')|0\rangle$$

($\mathrm{p} = i\partial$ は x についての微分演算子である)．これは (99.5) を使って，§76 で自由粒子の伝播関数に対する方程式 (76.7) を導くときに行なったのと同じ精度で計算される．その結果

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)_{il}\mathcal{G}_{lk}(x - x')$$
$$= -ie\gamma^\nu_{il}\langle 0|\mathrm{T}A_\nu(x)\psi_l(x)\bar{\psi}_k(x')|0\rangle + \delta_{ik}\delta^{(4)}(x - x')$$

を得る．この等式の右辺の δ－関数の項は，(76.7) のなかのそれと同様である．なぜかというと，$t = t'$ のときの交換関係はハイゼンベルク表示の ψ－演算子に対しても，相互作用表示のそれに対しても同じであるからである．第1項は $-ie\gamma_\nu K^\nu_{lk}(x, x, x')$ である．したがって（今度も双スピノール添字を落として）

$$(\hat{\mathrm{p}} - m)\mathcal{G}(x - x') = -ie\gamma^\mu K_\mu(x, x, x') + \delta^{(4)}(x - x') \tag{104.5}$$

と書くことができる．フーリエ成分に移るために，定義 (103.3) を $d^4k\,d^4p_2/(2\pi)^8$ で積分すれば

$$\int K^{\mu}(p+k,p\,;\,k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}=\int K^{\mu}(0,0,x_3)e^{-ipx_3}d^4x_3$$
$$=\int K^{\mu}(x,x,x')e^{ip(x-x')}d^4(x-x') \qquad (104.6)$$

を得ることを思い起こそう．これから，左辺の積分は関数 $K^{\mu}(x,x,x')$ のフーリエ成分で表わされることがわかる．このようにして，方程式（104.5）の両辺のフーリエ成分をとり，定義（103.9）を使い，$\hat{p}-m=G^{-1}(p)$ であることを思い出して

$$G^{-1}(p)\mathcal{G}(p)=1-ie^2\int\gamma^{\nu}\mathcal{G}(p+k)\Gamma^{\mu}(p+k,p\,;\,k)\mathcal{G}(p)\cdot D_{\mu\nu}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

を得る．最後にこの等式に右から $\mathcal{G}^{-1}(p)$ を掛けて，ふたたび方程式（104.2）に到達する．

§105. ウォードの恒等式

光子伝播関数と頂点部分のあいだのダイソンの方程式よりもずっと簡単な，いま一つの関係式がゲージ不変性の結果として出てくる．

それを導くために，$\chi(x)\equiv\delta\chi(x)$ を 4－座標 x の単なる（演算子でない）無限小関数と仮定してゲージ変換（99.8）を行なう．このとき電子伝播関数は量

$$\delta\mathcal{G}(x,x')=ie\mathcal{G}(x-x')[\delta\chi(x)-\delta\chi(x')] \qquad (105.1)$$

だけ変化する．この形のゲージ変換が時空間の一様性を壊すこと，そして関数 $\delta\mathcal{G}$ が引数の差 $x-x'$ だけに依存するのではなく，引数 x および x' 個々に依存することを強調しておこう．したがって，これのフーリエ展開は変数 x および x' について個々に行なわれる．言いかえれば，運動量表示で $\delta\mathcal{G}$ は二つの 4－運動量の関数になる．

$$\delta\mathcal{G}(p_2,p_1)=\iint\delta\mathcal{G}(x,x')e^{ip_2x-ip_1x'}d^4x\,d^4x'.$$

ここに（105.1）を代入して，$d^4x\,d^4\xi$ あるいは $d^4\xi\,d^4x'\,(\xi=x-x')$ についての積分を行ない

$$\delta\mathcal{G}(p+q,p)=ie\,\delta\chi(q)[\mathcal{G}(p)-\mathcal{G}(p+q)] \qquad (105.2)$$

を得る．

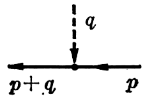
他方，このゲージ変換の際に，演算子 $A_{\mu}(x)$ には関数

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(x)=-\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\delta\chi \qquad (105.3)$$

が付け加えられる．これは無限小の外場とみなすことができる．運動量表示では

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(q) = iq_{\mu}\,\delta\chi(q) \tag{105.4}$$

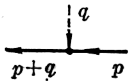
である．量 $\delta\mathcal{G}$ はこの場の影響による伝播関数の変化として計算することができる．$\delta\chi$ についての1次の量までの精度で，この変化は一つの骨組み図形

$i\mathcal{G}(p+q, p) =$ 

で表わされる．ここで太い点線は外場の有効線である．すなわちこれには因子

$$\delta A_{\mu}^{(e)}(q) + \delta A_{\lambda}^{(e)}(q)\frac{\mathcal{P}^{\lambda\nu}(q)}{4\pi}\mathcal{D}_{\nu\mu}(q)$$

があてがわれる（(100.15) 参照）．しかし，4－ベクトル $\delta A_{\lambda}^{(e)}(q)$ は（q に関して）縦波であり，テンソル $\mathcal{P}^{\lambda\nu}$ は横波である．したがって第2項はここでは0になり

$i\mathcal{G}(p+q, p) =$  (105.5)

となる．ここで細い破線にはいつものように単なる場 $\delta A^{(e)}$ があてがわれる．解析的な形では

$$\delta\mathcal{G} = e\mathcal{G}(p+q)\Gamma^{\mu}(p+q, p\,;\,q)\,\mathcal{G}(p)\cdot\delta A_{\mu}^{(e)} \tag{105.6}$$

となる．

ここに (105.4) を代入し，今度は (105.2) とくらべて関係式

$$\mathcal{G}(p+q) - \mathcal{G}(p) = -\mathcal{G}(p+q)\Gamma^{\mu}(p+q, p\,;\,q)\mathcal{G}(p)\cdot q_{\mu}$$

を得る．あるいは逆行列に対して

$$\mathcal{G}^{-1}(p+q) - \mathcal{G}^{-1}(p) = q_{\mu}\Gamma^{\mu}(p+q, p\,;\,q) \tag{105.7}$$

を得る (H. S. Green, 1953)．

この等式で $q\to 0$ とし，q_{μ} が無限小のときにこの両辺の係数をくらべて

$$\frac{\partial}{\partial p_{\mu}}\mathcal{G}^{-1}(p) = \Gamma^{\mu}(p, p\,;\,0) \tag{105.8}$$

を得る．これがいわゆるウォードの恒等式 (J. G. Ward, 1950) である．$\mathcal{G}^{-1}(p)$ の運動量についての微係数が，運動量転移が0のときの頂点演算子と一致することがわかる[1]．

---

1) ゼロ近似，つまり自由粒子の伝播関数に対しては，この恒等式は明らかに $G^{-1}(p) = \hat{p} - m$ であり，したがって $\partial G^{-1}/\partial p_{\mu} = \gamma^{\mu}$ である．

関数 $\mathcal{G}(p)$ 自体の微係数は

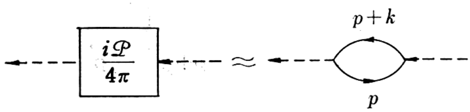
$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu} i\mathcal{G}(p) = i\mathcal{G}(p)\left[-i\Gamma^\mu(p, p\,;\,0)\right] i\mathcal{G}(p) \qquad (105.9)$$

となる．

同様に $\delta\chi$ についてさらに高次の項までの精度の計算を行ない，高次の微係数を求めることもできる．しかしこのような式は，われわれには必要はない．

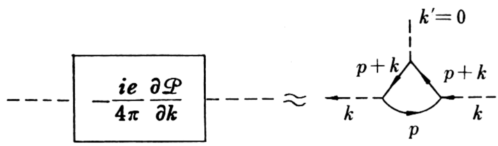
今度は偏りの演算子の微係数 $\partial\mathcal{P}(k)/\partial k_\mu$ を考察しよう．関数 $\mathcal{G}(p)$ と違って，$\mathcal{P}(k)$ という量はゲージ不変であり，人為的な外場 (105.4) を導入しても変わらない．したがって，その微係数は同じ方法で計算してはいけない．しかしながら，それに対しては，ある決まった図形表式を得ることができる．

このために，演算子 $\mathcal{P}$ の定義に現われる最初の図形，すなわち2次の図形を考えよう．つまり



(105.10)

である．このなかの実線は因子 $iG(p)$ と $iG(p+k)$ に対応する．k についての微分は後者を $i\partial G(p+k)/\partial k$ に変える．そして恒等式 (105.9) にしたがって，このような変化は電子線に余分の頂点を付け加えることに対応する．すなわち



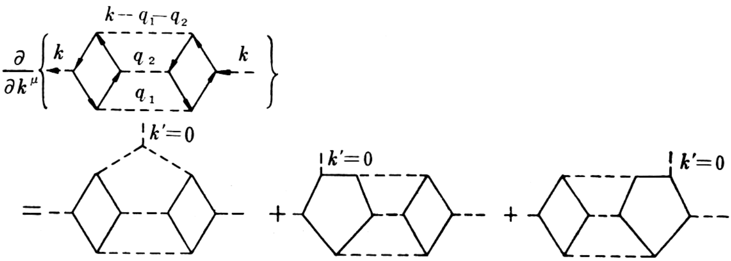
(105.11)

である．

0 にならない最初の次数で，求める微係数は三つの光子端をもつ図形（《光子3端子》）を使って表わされることがわかるだろう．同時に，これらの図形はそれ自体，けっして一つの光子が二つの光子に転換する振幅を与えるものではないことを強調しよう．このような過程の振幅は，図形 (105.11) と，環を回る方向を逆にした別の図形との和で表わされる．ファリーの定理にしたがってこの和は0になる．図形 (105.11) 自体は0には等しくない．

同様にして，k に依存するすべての電子線につぎつぎと $k'=0$ の頂点を付け加えるこ

とによりもっと複雑な図形を微分することができる．しかしながら，k 依存性が光子内線に含まれるような図形もある．たとえばつぎの図の左辺である．



括弧内の図形の微係数はここでは，新しい図形記号を導入して表わされる．それは人為的な3光子頂点，すなわち三つの破線が出ている点であり，つぎの量に対応する．

$$4\pi i\frac{\partial D^{-1}}{\partial k^{\mu}}=2ik_{\mu}\equiv v_{\mu}. \tag{105.12}$$

今や k に依存する線に頂点 v_μ あるいは γ_μ を付け加え，さらに一般則により計算することによって，任意の図形を微分することができる．これらの高次の補正を加えて

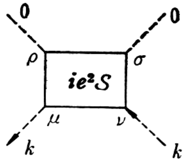
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\lambda}}=\mathcal{V}_{\mu\lambda\nu} \tag{105.13}$$

を得る．$ie\mathcal{V}_{\mu\lambda\nu}$ は，上述の方法で得られたすべての光子3端子の内部部分の和である．

将来のために，さらに偏りの演算子の2次微係数が必要になる．同様な方法で等式 (105.13) をもう一度微分して

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\mathcal{P}_{\mu\nu}}{\partial k^{\rho}\partial k^{\sigma}}=\mathcal{S}_{\mu\rho\sigma\nu}+\mathcal{S}_{\mu\sigma\rho\nu} \tag{105.14}$$

を得る．ここで $ie^2\mathcal{S}$ は



(105.15)

の形の《光子4端子》のすべての内部部分の和である（もちろん，人為的な3光子頂点 (105.12) をもつグラフも含んでいる）．

§106.　外場内の電子伝播関数

もしも系が与えられた外場 $A^{(e)}(x)$ のなかにあれば，正確な電子伝播関数は同じ公式(102.1) によって定義される．しかし，演算子のハイゼンベルク表示への変換を実現するハミルトニアン $\mathrm{H}=\mathrm{H}_0+\mathrm{V}$ のなかに，電子と外場との相互作用が現われる．すなわち

$$\mathrm{V}=e\int \mathrm{A}_\mu \mathrm{j}^\mu d^3x+e\int A_\mu^{(e)} \mathrm{j}^\mu d^3x \tag{106.1}$$

である．外場は時空間の一様性を破るので，伝播関数 $\mathcal{G}(x,x')$ は，今は差 $x-x'$ にのみ依存するのではなく，両引数 x および x' の個々に依存するはずである．

もしも普通の方法で相互作用表示に移れば，仮想的光子線とならんで外場の線も現われるような，普通の図形手法に到達する．しかしながら，このような手法は外場を小さい摂動とみなしてはいけないような場合，なかんずく，場のなかの粒子が結合状態にあるときには不便である．それにもかかわらず，外場内の電子伝播関数は，結合状態の研究に対して，特に輻射補正を考慮したエネルギー準位の決定に対しては真先に必要になる．このような伝播関数をつくるためには，外場が電子－光子相互作用について《ゼロ》近似ですでに正確に考慮に入れられている演算子から出発する必要がある (W. H. Furry, 1951)．

以後，外場が定常的であること，すなわち時間に依存しないことを仮定する．

求める ψ－演算子の表示は，外場内の第二量子化の公式(32.9)で与えられる．

$$\begin{aligned}\psi^{(e)}(t,\boldsymbol{r})&=\sum_n\left\{\mathrm{a}_n\psi_n^{(+)}(\boldsymbol{r})e^{-i\varepsilon_n^{(+)}t}+\mathrm{b}_n^+\psi_n^{(-)}(\boldsymbol{r})e^{i\varepsilon_n^{(-)}t}\right\},\\ \bar{\psi}^{(e)}(t,\boldsymbol{r})&=\sum_n\left\{\mathrm{a}_n^+\bar{\psi}_n^{(+)}(\boldsymbol{r})e^{i\varepsilon_n^{(+)}t}+\mathrm{b}_n\bar{\psi}_n^{(-)}(\boldsymbol{r})e^{-i\varepsilon_n^{(-)}t}\right\}.\end{aligned} \tag{106.2}$$

ここで $\psi_n^{(\pm)}(\boldsymbol{r})$ および $\varepsilon_n^{(\pm)}$ は，《1粒子》問題の解，すなわち場のなかの粒子に対するディラック方程式の解に現われる，それぞれ電子および陽電子の波動関数およびエネルギー準位である．演算子 (106.2) が，ハイゼンベルク表示と相互作用表示の中間であるような，ある表示 (**ファリー表示**) の ψ－演算子であることは容易にわかる．それはつぎの形に書くことができる．

$$\begin{aligned}\psi^{(e)}(t,\boldsymbol{r})&=e^{i\mathrm{H}_1t}\psi(\boldsymbol{r})e^{-i\mathrm{H}_1t},\\ \bar{\psi}^{(e)}(t,\boldsymbol{r})&=e^{i\mathrm{H}_1t}\bar{\psi}(\boldsymbol{r})e^{-i\mathrm{H}_1t}.\end{aligned} \tag{106.3}$$

ここで

$$\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_0+e\int A_\mu^{(e)}(x)\mathrm{j}^\mu(x)d^3x$$

である．電磁場の演算子 A_μ は，もちろん，H_1 のなかの第2項と可換である．したがっ

て，それに対してはファリー表示は相互作用表示と一致する．

ゼロ近似の電子伝播関数は，新しい表示では

$$G_{ik}^{(e)}(x, x') = -i\langle 0|\mathrm{T}\psi_i^{(e)}(x)\bar{\psi}_k^{(e)}(x')|0\rangle \tag{106.4}$$

のように定義される．演算子 $\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r})$ は外場内のディラック方程式

$$[\hat{\mathrm{p}} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m]\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r}) = 0 \tag{106.5}$$

を満足する．そして関数 $G^{(e)}$ は対応する方程式

$$[\hat{\mathrm{p}} - e\hat{A}^{(e)}(x) - m]G^{(e)}(x, x') = \delta^{(4)}(x - x') \tag{106.6}$$

を満足する（(104.5) の導き方を参照）．

正確な伝播関数 $\mathcal{G}$ を e^2 についての級数の形で表わす図形手法は，ハイゼンベルク表示からファリー表示へ移ることによってつくられる．これは前に行なった相互作用表示への移行と同じ精度である．われわれは結果としてまったく同じ形の図形が得られる．このとき実線には今度は（iG の代りに）因子 $iG^{(e)}$ があてがわれる．

図形の解析的な式の書き方にわずかな差が生じる．これは座標表示で $G^{(e)}$ が差 $x - x'$ だけの関数ではないことから起こっている．しかしながら，定外場内では時間の一様性は保たれている．したがって，時刻 t および t' は前と同様に差 $t - t' \equiv \tau$ の形でのみ含まれるはずである．かくして

$$G^{(e)} = G^{(e)}(\tau, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$$

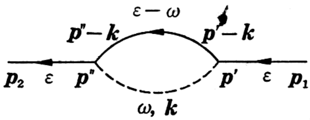
となる．運動量表示への移行は，この関数の引数のおのおのについてのフーリエ展開により実行される．

$$G^{(e)}(\tau, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \iiint e^{i(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r} - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}' - \varepsilon\tau)} G(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) \frac{d\varepsilon}{2\pi} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}. \tag{106.7}$$

$iG^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1)$ に対応する各線は，今度は一つの仮想的エネルギー値 ε と，二つの運動量の値，すなわち初めの値 $\boldsymbol{p}_1$ と終りの値 $\boldsymbol{p}_2$ とがつけられる．

$$iG^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_1) = \xleftarrow{\boldsymbol{p}_2\ \varepsilon\ \boldsymbol{p}_1}. \tag{106.8}$$

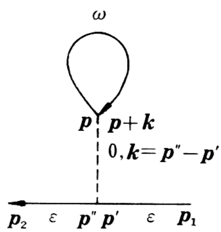
結果として，図形の解析的な式を書く規則が得られる．そこでは，普通のように $d\varepsilon/2\pi$ による積分が行なわれ，$d^3p_1/(2\pi)^3$ および $d^3p_2/(2\pi)^3$ についての積分は，各頂点での運動量保存則を考慮した上で独立に行なわれる．たとえば



$$= e^2 \iiint G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}'')\gamma^{\mu} G^{(e)}(\varepsilon - \omega, \boldsymbol{p}'' - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{k})$$
$$\times \gamma^{\nu} G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1) D_{\mu\nu}(\omega, \boldsymbol{k}) \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3} \tag{106.9}$$

である．

上に述べられた手法では，普通の手法で《真空電流》と関係があるものとして捨てられている，《それ自体で閉じた》電子線をもつ図形もまた考慮する必要がある．外場が存在するときには，このような電流は場によって呼び起こされる《真空の偏り》と関連して，もはや0になる必要はない．かくして，図形



(106.10)

のなかで，上の環は因子

$$i \iint G^{(e)}(\omega, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{106.11}$$

に対応する．しかしながら，ここで $d\omega$ についての積分につけられる意味を，もうすこし正確にしておく必要がある．それは関数 $G^{(e)}(\tau)$ のフーリエ成分の $d\omega$ についての積分は $\tau = 0$ におけるこの関数の値をとることになるからである．ところがこの点では関数 $G^{(e)}(\tau)$ は不連続である．したがって，これの二つの極限値のなかのどちらの値をとらねばならぬかを示す必要がある．この問題を明らかにするためには，積分（106.11）が同一の電流演算子

$$\mathrm{j}^{\mu} = \bar{\psi}^{(e)}(t, \boldsymbol{r})\gamma^{\mu}\psi^{(e)}(t, \boldsymbol{r})$$

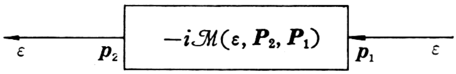
のなかにある ψ - 演算子の縮約から生じていることに気付けば十分である．ここで $\bar{\psi}^{(e)}$ は $\psi^{(e)}$ の左にある．伝播関数の定義（106.4）にしたがって，もしも t' を $t' = t + 0$，すな

わち関数 $G^{(e)}(t-t')$ の極限値を $t-t'\to-0$ の極限と理解すれば，このような因子の $t=t'$ のときの順序が得られる．あるいは (106.11) のなかの $d\omega/2\pi$ による積分は

$$\int\cdots e^{-i\omega\tau}\frac{d\omega}{2\pi} \qquad (\tau\to-0 \text{ のとき}) \tag{106.12}$$

と理解しなければならないと言ってもよい．

外場中の質量演算子は§102 とまったく同様に定義される．$-i\mathcal{M}$ はすべてのコンパクトな自己エネルギー型ブロックの総和である．それは今度はエネルギー ε と外線の端がブロックにもち込む運動量と，もち出す運動量 $\boldsymbol{p}_1$ および $\boldsymbol{p}_2$ との関数である．



(106.13)

(102.6) を導くときと同様な精度で，つぎの方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1)-G^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1)\\&\quad=\iint G^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}'')\mathcal{M}(\varepsilon,\boldsymbol{p}'',\boldsymbol{p}')\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p}',\boldsymbol{p}_1)\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p''}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{106.14}$$

つぎのようにすればこの方程式にはいっそう自然な形を与えることができる．それには関数

$$\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\iint\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1)e^{i(\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{r}')}\frac{d^3p_1d^3p_2}{(2\pi)^6}. \tag{106.15}$$

および他の量に対しても同様な関数を導入し，空間変数を使った座標表示へ移ればよい．(106.14) に逆フーリエ変換を行なって

$$\begin{aligned}&\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-G^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\\&\quad=\iint G^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)\mathcal{M}^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}')\,d^3x_1\,d^3x_2\end{aligned}$$

を得る．今度はこの方程式の両辺に演算子

$$\gamma^0\varepsilon-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-e\gamma^\mu A^{(e)}_\mu(x)$$

を掛けよう（ε は数である．$\mathbf{p}=-i\nabla$ は座標 $\boldsymbol{r}$ による微分演算子である）．このとき (106.6) にしたがって

$$[\gamma^0\varepsilon-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-e\hat{A}^{(e)}(x)]G^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{106.16}$$

であることを考慮する必要がある．この結果つぎのような方程式を得る．

$$\begin{aligned}&[\gamma^0\varepsilon-\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}-e\hat{A}^{(e)}(x)]\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\int\mathcal{M}^{(e)}(\varepsilon,\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)\mathcal{G}(\varepsilon,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}')\,d^3x_1\\&\qquad=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\end{aligned} \tag{106.17}$$

関数 $\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ の特別な価値は，その極が外場内の電子のエネルギー準位を決定することである．

初めに，近似関数 $G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ に対してこれを示そう．演算子（106.2）を伝播関数の定義（106.4）に代入して（自由粒子の関数に対する公式（76.12）と同様な精度で）

$$G_{ik}^{(e)}(t-t', \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \begin{cases} -i\sum_n \psi_{ni}^{(+)}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\boldsymbol{r}')\exp\{-i\varepsilon_n^{(+)}(t-t')\} & (t>t') \\ i\sum_n \psi_{ni}^{(-)}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\boldsymbol{r}')\exp\{i\varepsilon_n^{(-)}(t-t')\} & (t<t') \end{cases} \tag{106.18}$$

を得る．時間についてのフーリエ成分に移ると

$$G_{ik}^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\psi_{ni}^{(+)}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{nk}^{(+)}(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon - \varepsilon_n^{(+)} + i0} + \frac{\psi_{ni}^{(-)}(\boldsymbol{r})\bar{\psi}_{nk}^{(-)}(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon + \varepsilon_n^{(-)} - i0} \right\} \tag{106.19}$$

となる．ε の解析関数としての $G^{(e)}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ は，正の実軸上には電子のエネルギー準位に一致する極をもち，負の実軸上には陽電子のエネルギー準位と一致する極をもつことがわかる．$\varepsilon_n^{(\pm)} > m$ の値は，連続スペクトル[1]を形成し，対応する極は ε-面の二つの切断，すなわち，$-\infty$ から $-m$ までと m から $+\infty$ までとに対応している．$|\varepsilon| < m$ の線分上には，エネルギーの離散準位を定義する極がのっている．

正確な伝播関数 $\mathcal{G}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ に対しても，これをシュレーディンガー演算子の行列要素を使って表わし，同様な展開を得ることができる．この行列要素とハイゼンベルクの ψ-演算子行列要素はつぎの等式で結びつけられている．

$$\langle m|\psi(t, \boldsymbol{r})|n\rangle = \langle m|\psi(\boldsymbol{r})|n\rangle e^{-i(E_n-E_m)t} \tag{106.20}$$

($\bar{\psi}$ に対しても同様)．ここで E_n は外場中の系の正確な（すなわち，すべての輻射補正をした）エネルギー準位である．演算子 ψ は系の電荷を1（すなわち $+|e|$）だけ増し，演算子 $\bar{\psi}$ は減らす．これは行列要素 $\langle n|\psi|0\rangle$ および $\langle 0|\bar{\psi}|n\rangle$ のなかで，状態 $|n\rangle$ は $+1$ に等しい系の電荷に対応しなければならないこと，すなわち1個の陽電子の他には，ただ数個の電子-陽電子対およびいくつかの光子を含んでもよいことを意味している．これらの状態のエネルギーを $E_n^{(-)}$ と置こう．同様にして，行列要素 $\langle 0|\psi|n\rangle$ および $\langle n|\bar{\psi}|0\rangle$ のなかの状態 $|n\rangle$ は1個の電子 + 数組の対 + 光子を含むことができる（エネルギー E_n^{+}）．（106.18）の代りに今度は

$$\mathcal{G}_{ik}(t-t', \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \begin{cases} -i\sum_n \langle 0|\psi_i(\boldsymbol{r})|n\rangle\langle n|\bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}')|0\rangle\exp\{-iE_n^{(+)}(t-t')\} & (t>t'), \\ i\sum_n \langle 0|\bar{\psi}_k(\boldsymbol{r}')|n\rangle\langle n|\psi_i(\boldsymbol{r})|0\rangle\exp\{iE_n^{(-)}(t-t')\} & (t<t') \end{cases} \tag{106.21}$$

1）外場は無限遠でなくなると仮定されている．

を得る．これから

$$\mathcal{G}_{ik}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \sum_n \left\{ \frac{\langle 0|\phi_i(\boldsymbol{r})|n\rangle \langle n|\bar{\phi}_k(\boldsymbol{r}')|0\rangle}{\varepsilon - E_n^{(+)} + i0} + \frac{\langle 0|\bar{\phi}_k(\boldsymbol{r}')|n\rangle \langle n|\phi_i(\boldsymbol{r})|0\rangle}{\varepsilon + E_n^{(-)} - i0} \right\} \qquad (106.22)$$

を得る．

ε が離散エネルギー準位 $E_n^{(+)}$ のどれか一つに（あるいは $-E_n^{(-)}$ のどれか一つに）近いとしよう．このとき，(106.22)のなかのすべての和のなかで，対応する極の項をただ一つだけ残すことができる．それからこれを（106.17）に代入して，2 番目の引数 $\boldsymbol{r}'$ ($\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ のとき）に依存する因子が方程式から落ちることがわかる．この結果，関数 $\langle 0|\phi(\boldsymbol{r})|n\rangle$ （あるいは $\langle n|\phi(\boldsymbol{r})|0\rangle$，これをわれわれは簡単のために $\Psi_n(\boldsymbol{r})$[1] と置く）に対する斉次微積分方程式を得る．添字 n を落として

$$[\gamma^0\varepsilon + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\boldsymbol{r})]_{ik}\Psi_k(\boldsymbol{r}) - \int \mathcal{M}_{ik}(\varepsilon, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)\Psi_k(\boldsymbol{r}_1)\, d^3x_1 = 0 \qquad (106.23)$$

が成り立つ．離散エネルギー準位 E_n は，今はこの方程式の固有値になる．したがって，方程式（106.23）はこれらの準位を決めるための基礎的な正規な手続きになる．

たとえば（106.23）から，電子の離散準位 ε_n の，$\mathcal{M}$ についての 1 次の補正を表わそう．それはディラック方程式

$$[\gamma^0\varepsilon_n + i\boldsymbol{\gamma}\nabla - e\hat{A}^{(e)}(\boldsymbol{r})]\psi_n(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (106.24)$$

を解いた結果得られるものである．波動関数 $\psi_n(\boldsymbol{r})$ は条件

$$\int \psi_n^* \psi_n\, d^3x = 1 \qquad (106.25)$$

で規格化される．方程式（106.23）の固有関数を

$$\Psi_n(\boldsymbol{r}) = \psi_n(\boldsymbol{r}) + \psi_n^{(1)}(\boldsymbol{r}) \qquad (106.26)$$

の形に書こう．ここで $\psi_n^{(1)}$ は $\psi_n(\boldsymbol{r})$ に対する補正である．(106.26) を方程式（106.23）に代入し，それに左から $\bar{\psi}_n(\boldsymbol{r})$ を掛け，d^3x について積分し[2]，求める式

$$E_n - \varepsilon_n \approx \iint \bar{\psi}_{ni}(\boldsymbol{r})\mathcal{M}_{ik}(\varepsilon_n, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1)\psi_{nk}(\boldsymbol{r}_1)\, d^3x\, d^3x_1 \qquad (106.27)$$

---

1) 輻射補正を無視すると，$\Psi_n(\boldsymbol{r})$ は（1 電子あるいは 1 陽電子の状態に対し）ディラック方程式の解である $\psi_n^{(+)}$ あるいは $\psi_n^{(-)}$ と一致する．

2) 積分に際し，方程式（106.24）の微分演算子の自己共役性を，その $\psi_n^{(1)}$ への作用を $\bar{\psi}_n$ に移すために利用する必要がある．

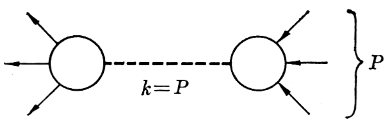
を得る.

§107. くりこみの物理的条件

この章でこれまで述べられた理論は，多分に形式的性格をもつものであった．すべての量をあたかもそれらが有限であるかのように取り扱い，理論で出会う無限大からは故意に注意をそらせてきた．しかしながら，摂動論にしたがって関数 $\mathscr{D}$, $\mathscr{G}$, Γ を実際に計算する際には，補足的な考察なしになんらかの特定値を与えてはいけないような発散積分に出会う．現存する量子電気力学の論理的不完全性がこのような発散に現われているわけである．しかしながらわれわれはこの理論で一意的に《無限大の差し引き》を行ない，その結果直接に物理的意味をもつすべての量に対し有限の値を得ることを可能にするようなある処方箋をつくることができる．この処方箋の基礎にはつぎのような明白な物理的要求が存在する．それはまとめると，光子の質量は0に等しく，電子の電荷と質量とが観測値に等しくなるはずであると，いうことになる．

光子伝播関数に課せられた条件を明らかにすることから始めよう．

1個の仮想的光子をもつ1粒子性中間状態を経て起こりうる散乱過程を考察しよう．このような過程の振幅は，始めの粒子系の全4－運動量 P の平方が現実の光子の質量の平方と一致するとき，すなわち $P^2=0$ のときに極をもたねばならない．われわれは§80でこの要求がユニタリー性の一般的要請から出るものであることを見てきた．振幅中の極の項は (80.1) の形の図形



(107.1)

から生じる．このとき輻射補正を考慮すると，図形の二つの部分は太い破線（正確な光子伝播関数）で結ばれる必要がある．これは関数 $\mathscr{D}(k^2)$ が $k^2=0$ で極をもつことを意味している．すなわち

$$\mathscr{D} \longrightarrow \frac{4\pi Z}{k^2} \qquad (k^2\to 0 \text{ のとき}) \tag{107.2}$$

でなければならない．ここで Z は定数である．偏りの演算子 $\mathscr{P}(k^2)$ に対しては，(100.20) にしたがって条件

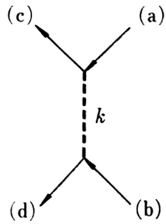
$$\mathscr{P}(0)=0 \tag{107.3}$$

が得られる．このとき (107.2) の係数は

$$\frac{1}{Z}=1-\left.\frac{\mathcal{P}(k^2)}{k^2}\right|_{k^2\to 0}$$

である．

関数 $\mathcal{P}(k^2)$ に対するこれ以上の制限は，粒子の電荷の物理的定義の解析から得られる．それにはつぎのようなことをする．互いに遠く離れて静止している[1]二つの古典的粒子（すなわち重いほどよい）は，クーロンの法則 $U=e^2/r$ にしたがった相互作用をするはずである．別の面からこの相互作用は図形



(107.4)

で表わされる．ここで，上と下の線は古典的粒子に対応する．光子の自己エネルギーの補正は仮想的光子線で考慮されている．重い粒子線に関する他のすべての補正は図形を0にするはずである．事実，さらになんらかの内線を図形 (107.4) に加えることは（たとえば，線 a と c，あるいは a と b の光子線による結合）は図形に，適当な伝播関数を伴った仮想的な重い粒子線が現われる結果になる．しかし粒子の伝播関数は分母にその質量 M をもち，$M\to\infty$ のとき0になる．

図形 (107.4) の形から，そのなかの因子 $e^2\mathcal{D}(k^2)$ は（符号を除いて）粒子の相互作用ポテンシャルのフーリエ写像であることが明らかである (§83)．相互作用が静的であることは，仮想的光子の振動数 $\omega=0$ であることを意味し，距離が大きいことは波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ が小さいことを意味する．クーロン・ポテンシャルのフーリエ写像は $4\pi e^2/\boldsymbol{k}^2$ である．最後に，関数 $\mathcal{D}$ が平方 $k^2=\omega^2-\boldsymbol{k}^2$ にのみ依存するので，つぎの条件に到達する[2]．

$$\mathcal{D}\longrightarrow\frac{4\pi}{k^2}\qquad (k^2\to 0\ のとき) \tag{107.5}$$

すなわち，(107.2) の係数は $Z=1$ でなければならない．偏りの演算子 $\mathcal{P}(k^2)$ に対して，これは

1) 距離 $\gg 1/m$ であると考える．ここで m は電子の質量である．
2) 符号は明らかである．すなわち，$\mathcal{D}(k^2)$ は自由粒子の伝播関数 $D(k^2)$ に近づくからである．

$$\frac{\mathscr{P}(k^2)}{k^2} \to 0 \qquad (k^2 \to 0 \text{ のとき}) \tag{107.6}$$

でなければならないことを意味する．すでに知られている条件 (107.3) のほかに，これから

$$\mathscr{P}'(0) = 0 \tag{107.7}$$

でなければならないこともまた出てくる．

§100 で，現実の光子の有効外線は図形では因子 (100.15) に，あるいは (100.16) および (100.19) を考慮して

$$\left[1 + \frac{1}{4\pi}\mathscr{P}(0)\mathscr{D}(0)\right] e_\mu$$

に対応することが指摘された．今度は，(107.5)，(107.6) のために補正項が 0 になることがわかった．言いかえれば，つぎのような重要な結果に到達したことになる．すなわち光子外線は一般に輻射補正を考慮する必要はないということである．

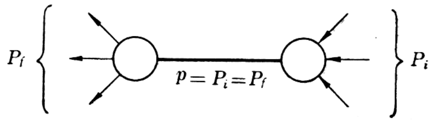
このようにして，当然の物理的要求から，量 $\mathscr{P}(0)$ および $\mathscr{P}'(0)$ の特定 (0 に等しい) 値が確定することになる．それにもかかわらず，摂動論の図形によるこれらの量の計算は，これらに発散積分をもたらすことになる．これらの無限大を取り除く方法は，これらの発散式を物理的要求によって，確定された既知の値に押し込むことであることがわかる．このような手続きを対応する量の**くりこみ**と呼ぶ[1]．

この操作を実行する方法は，いくらか違った形に定式化することができる．それは，粒子の電荷をくりこむためには物理的でない《裸の》電荷 e_c をパラメータとして導入する．それは公式的摂動論に現われる，電磁相互作用の演算子の出発の式のなかに含まれるものである．この条件のもとで，くりこみは ($k^2 \to 0$ のとき) $e_c^2\mathscr{D}(k^2) \to 4\pi e^2/k^2$ の要求として定式化される．ここで e は粒子の真の電荷である．これから関係式 $e_c^2 Z = e^2$ が見いだされ，これを使って物理的でない量 e_c は観測される効果を決定する式から消去される．ただちに $Z = 1$ を要求すると，それによりわれわれは《一歩一歩》のくりこみをすることになり，途中の演算においてさえも人為的な量を導入する必要性はなくなることになる．

電子伝播関数のくりこみの条件の解明に移ろう．そのために今度は，1 個の仮想的電子

1) このような扱い方の考えはクラマース (H. Kramers, 1947) が最初に述べた．量子電気力学でのくりこみの方法の系統的な展開はダイソン，朝永振一郎，ファインマンおよびシュヴィンガーの仕事によるものである．

をもつ1粒子性中間状態を経て行なわれうる散乱過程を考察しよう．このような過程の振幅は，始めの粒子の全4－運動量 P_i の平方が現実の電子の質量の平方と一致するとき，すなわち $P_i^2=m^2$ のときに極をもっている．振幅内の極の項は



(107.8)

の形の図形から生じる．ここで輻射補正を考慮して，太い線は正確な電子伝播関数である．これは関数 $\mathcal{G}(p)$ が $p^2=m^2$ のときに極をもたねばならないこと，すなわちつぎのような極限の形をもたなければならないことを意味している．

$$\mathcal{G}(p)\approx Z_1\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}+g(p) \qquad (p^2\to m^2 \text{ のとき}). \tag{107.9}$$

ここで Z_1 はスカラー定数である．また $g(p)$ は $p^2\to m^2$ のとき有限のままである．(107.9) の極性の項（$\hat{p}+m$ に比例する）の行列構造は，極の存在の要求自体が出てきたのとまったく同じユニタリー条件の結果である．同時に電子外線のくりこみの条件についての重要問題をも明らかにしながら，このことを示そう．

もしも $\mathcal{G}(p)$ が極限の形 (107.9) をもつならば，逆行列は

$$\mathcal{G}^{-1}(p)\approx\frac{1}{Z_1}(\hat{p}-m)-(\hat{p}-m)g(\hat{p}-m) \qquad (p^2\to m^2 \text{ のとき}) \tag{107.10}$$

となり，質量演算子は

$$\mathcal{M}=G^{-1}-\mathcal{G}^{-1}\approx\left(1-\frac{1}{Z_1}\right)(\hat{p}-m)+(\hat{p}-m)g(\hat{p}-m) \tag{107.11}$$
$$(p^2\to m^2 \text{ のとき})$$

となる．有効電子外線（たとえば入射線）は図形のなかでは因子

$$\mathcal{U}(p)=u(p)+\mathcal{G}(p)\mathcal{M}(p)u(p) \tag{107.12}$$

に対応する（(100.15) 参照）．ここで $u(p)$ は普通の電子の波動関数の振幅で，ディラック方程式 $(\hat{p}-m)u=0$ を満足する．相対論的不変性の要求のために（$\mathcal{U}$ は u と同様に双スピノールである）$p^2\to m^2$ のときの $\mathcal{U}(p)$ の極限値は $u(p)$ と，定スカラー因子だけ異なっている．すなわち

$$\mathcal{U}(p)=Z'u(p) \tag{107.13}$$

である．この因子 Z' は因子 Z_1 と一定の方法で結びつけられている．しかし (107.10),

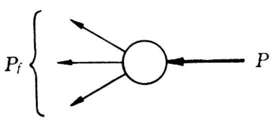
(107.11) を (107.12) に代入すると不定性が現われるために，単なる代入によってこの関係式を決定することができない．すなわち，(107.12) のなかの種々の因子を極限に移行する順序に依存して結果が変わるからである．

しかしながら，その代りに図形 (107.8) で記述される反応に使うユニタリー性の条件に着目して，極限移行法の正当性の問題を明らかにしないで済ますことができる．一般的に言って，ユニタリー性の関係式は個々の図形に関するものではなく，全体としての過程の振幅に関するものである．しかし $p^2 \to m^2$ のとき，極性図形 (107.8) が対応する振幅 M_{fi} のなかで基本的寄与を与える．したがって，同一の反応に関する他の図形は考えなくてもよい．

§80 ですでに示されたように，ユニタリー性の要求のために，1 粒子性中間状態は，反応振幅に δ－関数型の項をもつ虚部

$$i\pi\delta(p^2 - m^2) \sum_{\text{偏り}} M_{fn} M_{in}^* \tag{107.14}$$

の出現をもたらすことになる．ここで今の場合，添字は一つの現実の電子に関するもので，和はその偏りについて行なわれる (余計な繁雑を避けるために，§80 におけると同様に，始めと終りの粒子の螺線度についてのユニタリー性の関係式の両辺の対称化は行なわれているものとする．ここでは $M_{fi} = M_{if}$ である)．振幅 M_{fn} は図形



によって描かれる過程に対応している．そして

$$M_{fn} = (M'_{fn}\mathcal{U}) = Z'(M'_{fn}u)$$

の形をもっている．ここで M'_{fn} は自由な双スピノール添字を一つもつ因子である[1]．同様に振幅 M_{in}^* は

$$M_{in}^* = (\bar{\mathcal{U}}M'^*_{in}) = Z'(\bar{u}M'^*_{in})$$

の形の構造をもっている．電子の偏りについての和は，積 $(M'_{fn}u)(\bar{u}M'^*_{in})$ を $M'_{fn}(\hat{p}+m)M_{in}$ に変える．したがって振幅 M_{fi} 中の項 (107.14) はつぎの形になる．

1) ここですこし詳論する必要がある．電子は安定な粒子であるから，実際には別の現実の粒子系に転換することはできない．しかしながら，形式的には電子の代りにこのような転換が許されるような質量をもつある想像上の粒子を考えることができる．得られた関係式は，ここでは現実の質量値の解析接続の意味で理解する必要がある．

$$Z'^2 i\pi\delta(p^2-m^2)\{M'_{fn}(\hat{p}+m)M'^*_{in}\}.$$

虚部のこの項を使って，すべての散乱振幅中のすべての極性の項を復元することができる．(80.5) によって

$$M_{fi}=-\frac{Z'^2\{M'_{fn}(\hat{p}+m)M'^*_{in}\}}{p^2-m^2+i0}\qquad (p^2\to m^2\ \text{のとき})$$

になる．

他方，この振幅を図形 (107.8) から，直接計算すると

$$iM_{fi}=iM'_{fn}\cdot i\mathcal{G}(p)\cdot iM'^*_{in}$$

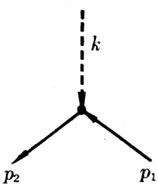
になる．この両式をくらべると上述の $\mathcal{G}(p)$ に対する極限の式 ((107.9) の第1項) が正しいことを示している．ここで

$$Z'=\sqrt{Z_1}\qquad (107.15)$$

である[1]．

今度は，電子伝播関数の必要な極限値を確立したのち，まだ頂点演算子に対する何かあらたな条件の設定が必要であることを示そう．

つぎの図形を考察しよう．



(107.16)

これは外場 $A^{(e)}(k)$ 内での（場について1次近似で）すべての輻射補正を考慮した電子散乱を表わしている．$k\to 0$，$p_2\to p_1\equiv p$ の極限では外場線の自己エネルギーの補正は消える（この補正は一般に，$k^2=0$ のときすべて消えることを思い起こそう）．このとき図形は振幅

$$M_{fi}=-e\bar{\mathcal{U}}(p)\Gamma(p,p;0)\mathcal{U}(p)\cdot A^{(e)}\quad (k\to 0)\qquad (107.17)$$

になる．ポテンシャル $A^{(e)}$ と電子の遷移電流 $\bar{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$ との積である．しかし $k\to 0$ のとき，ポテンシャル $A^{(e)}(x)$ は座標と時間に依存しない定数になる．このようなポテンシャルは一般にいかなる物理場にも対応しない（ゲージ不変の特別の場合である）．したがっ

---

1) 等式 (107.15) を定義 (107.12) から直接導くには，複雑な研究が必要である．これはつぎの論文にある；F. Dyson, *Phys. Rev.* **83**, 608 (1951).

て，それは電子流のいかなる変化も呼び起こさない．言いかえれば，いま考えられている極限で，遷移電流 $\overline{\mathcal{U}}\Gamma\mathcal{U}$ は単なる自由電流 $\overline{u}\gamma u$ と一致しなければならない．

$$\overline{\mathcal{U}}(p)\Gamma^{\mu}(p,p;0)\mathcal{U}(p) = Z_1\overline{u}(p)\Gamma^{\mu}u(p) = \overline{u}(p)\gamma^{\mu}u(p) \tag{107.18}$$

この要求は，本質的には電子の物理的電荷を定義する式そのものである．Z_1 の値への依存性以外は，これは自動的に満足されていることが容易にわかる．事実，(107.10) の $\mathcal{G}^{-1}(p)$ をウォードの恒等式 (105.8) に代入して

$$\Gamma^{\mu}(p,p;0) = \frac{1}{Z_1}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}g(p)(\hat{p}-m) - (\hat{p}-m)g(p)\gamma^{\mu}$$

を得る．方程式 $(\hat{p}-m)u=0$ および $\overline{u}(\hat{p}-m)=0$ を使うと等式 (107.18) は満足される．

われわれは，物理的過程の振幅をつくるときに，《くりこみの定数》Z_1 は一般に落ちることを見るであろう．それだけでなく，Γ の計算の際の発散から生じる不定性を使って，ただ単に

$$\overline{u}(p)\Gamma^{\mu}(p,p;0)u(p) = \overline{u}(p)\gamma^{\mu}u(p) \qquad (p^2=m^2 \text{ のとき}) \tag{107.19}$$

であるように，すなわち $Z_1=1$ と置くように要求してもよい．

このような定義の便利さは電子外線に補正を入れる必要性をなくしている点である．すなわち単に

$$\mathcal{U}(p) = u(p)$$

とするだけである．$Z_1=1$ のときに質量演算子 (107.11) は

$$\mathcal{M} = (\hat{p}-m)g(\hat{p}-m) \tag{107.20}$$

となり，(107.12) の第2項は明らかに0になることに気付けば，これを直接に証明することができる．このようにして，光子であれ電子であれ[1)]，すべての現実の粒子の外線の《くりこみ》を要求してはいけない．

§108. 光子伝播関数の解析的性質

光子伝播関数の解析的性質を研究するためには，関数 $\Pi(k^2)$ の性質の研究から始めると便利である．この目的のために定義 (100.1) を直接に使うことは，演算子 $A^{\mu}(x)$ のゲ

1) 光子伝播関数のくりこみをするとき，条件 $Z=1$ は必要な物理的要求として生じ，それを消去したあとでは光子外線に対する補正は自動的に行なわれる．しかしながら，形式的な見方からすれば，事情は光子外線に対しても電子外線に対しても同様である．$Z\neq1$ のとき，現実の光子の波動振幅 e_{μ} は，補正を勘定に入れると，$\sqrt{Z}$ 倍になる．

ージ非一意性およびこれに由来するその性質の不定性によって困難である.

§101 では，ゲージ不変の電流演算子の行列要素を使った光子の自己エネルギー型関数の式から出発して，関数 $\Pi(k^2)$ の積分表示 (101.11) が得られた．変数 k^2 を t[1] と置いて複素 t 平面内での関数 $\Pi(t)$ の性質を考察しよう．

積分表示

$$\Pi(t)=\int_0^\infty\frac{\rho(t')\,dt'}{t-t'+i0} \qquad (108.1)$$

から，負の実半軸上では関数 $\Pi(t)$ は実である．そして残りのすべての面上で対称関係式

$$\Pi(t^*)=\Pi^*(t) \qquad (108.2)$$

を満足する．

関数 $\Pi(t)$ は関数 $\rho(t)$ の特異点にのみ特異性をもつことができる．それは仮想的光子による現実の粒子の種々の組の生成のしきいである．それは $t=k^2$ という値のところにある．この値のときに，和 (101.9) のなかに新しい型の中間状態が《登場する》．この状態からの寄与はしきいの下では0に等しく，しきいの上で0ではない．これはしきいの点での関数の特異性へと導いている．これらのしきい値は，もちろん実で負にはならない[2]．したがって関数 $\Pi(t)$ の特異点は変数 t の正の実半軸上にある．もしもこの半軸に沿って切断を入れると，関数 $\Pi(t)$ はこのように切られた全平面上で解析的であるはずである．

(108.1) の被積分式の分母の項 $+i0$ は，極 $t'=t$ の下を迂回しなければならないことを示している．これは，t が実数のときの関数 $\Pi(t)$ の値というと，切断の上の縁でのその値と考えなければならないことを意味している．(76.18) の規則，すなわち

$$\frac{1}{x\pm i0}=\mathrm{P}\,\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x) \qquad (108.3)$$

を使って実の t に対して

$$\operatorname{Im}\Pi(t)\equiv\operatorname{Im}\Pi(t+i0)=-\pi\rho(t) \qquad (108.4)$$

を得る．切断の下の縁では，$\operatorname{Im}\Pi$ は逆の符号をもつ．しかし $\operatorname{Re}\Pi$ は両方の縁で同一である．したがって，切断における関数 $\Pi(t)$ の不連続は

$$\Pi(t+i0)-\Pi(t-i0)=-2\pi i\rho(t) \qquad (108.5)$$

である．

---

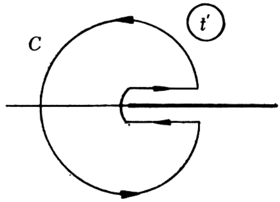
1) 時間の記号と混同しないこと！

2) $k^2=0$ の点は，3個（あるいはもっと大きい奇数個）の現実の光子の生成に対するしきいであり，$k^2=4m^2$ の点は電子－陽電子対生成のしきいである．

積分表示（108.1）自体はこの場合には唯単に，解析関数 $\Pi(t)$ に対するコーシーの公式とみなすことができる．事実，コーシーの公式

$$\Pi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Pi(t')\,dt'}{t'-t} \tag{108.6}$$

を切断を回っている積分路



（108.7）

に適用しよう．$\Pi(t)$ が無限遠で十分急速に減少するという仮定のもとに，大円上の積分は消え，切断の縁に沿っての積分はつぎのような公式（分散式）を与える．これは関数 $\Pi(t)$ をその虚部によって定義するものである．すなわち

$$\Pi(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(t'+i0)}{t'-t}\,dt' = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(t')}{t'-t-i0}\,dt'. \tag{108.8}$$

これに（108.4）を代入すると（108.1）を得る[1]．

関数 $\mathscr{P}(t)$ と $\mathscr{D}(t)$ の解析的性質は関数 $\Pi(t)$ の性質と一致する．後者を使って，それらは簡単な公式（101.2）および（100.20）によって表わされる．$\mathscr{D}(t)$ に対して

$$\mathscr{D}(t) = \frac{4\pi}{t}\left(1+\frac{\Pi(t)}{t}\right) \tag{108.9}$$

が成り立つ．実半軸（$t>0$）上では，上に述べたことにしたがって，t を $t+i0$ であると理解する必要がある．つぎに $\mathscr{D}(t)$ の虚部は（108.3）および（108.4）を使って計算することができる．このとき（107.6）にしたがって $t\to 0$ のとき $\Pi(t)/t\to 0$ であることを勘定に入れる必要がある．このとき

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{D}(t) = -4\pi^2\delta(t) + \frac{4\pi}{t^2}\,\mathrm{Im}\,\Pi(t) = -4\pi^2\delta(t) - \frac{4\pi^2}{t^2}\rho(t) \tag{108.10}$$

を得る．今度は関数 $\mathscr{D}(t)$ に（108.8）の形の分散式を適用し，それに対してつぎのような積分表示を得る．

---

1) 分散式はゲルマン，ゴールドバーガーおよびティリングにより場の量子論に導入された（M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, W. E. Thirring, 1954).

$$\mathscr{D}(t) = \frac{4\pi}{t+i0} + 4\pi\int_0^\infty \frac{\rho(t')}{t'^2}\frac{dt'}{t-t'+i0}. \tag{108.11}$$

この公式はチェレン＝レーマン展開と呼ぶ (G. Källen, 1952; H. Lehmann, 1954).

一方では関数 $\mathscr{D}(t)$ に対する切断の位置（それにしたがって切断上の虚部）と，他方図形 (107.4) で描かれる過程 a + b → c + d の振幅に対するユニタリー条件とのあいだに密接な関係がある（この反応は結局純粋に想像上のものである．しかしながら，それは保存則に矛盾しない．そしてそれに対するユニタリー条件は満足される必要がある).

始状態 (i) では，この過程には二つの《古典的》粒子 a および b があり，また終状態には他の二つ c および d がある．ユニタリー性の条件 (72.2)[1]は

$$T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4\sum_n T_{fn}T_{in}^*\delta^{(4)}(P_f - P_i) \tag{108.12}$$

である．右辺の和はすべての物理的な《中間》状態 n について行われる．この場合，仮想的光子 k により生成されうる現実の対と光子からなる系の状態，すなわち関数 $\rho(k^2)$ の定義 (101.9) のなかの行列要素に現われる状態のようなものは，明らかにこのような状態である．振幅 M_{fi} および M_{if}^* はそれぞれ因子 $\mathscr{D}(k^2)$ および $\mathscr{D}^*(k^2)$ を含み，その差は虚部 $\operatorname{Im}\mathscr{D}(k^2)$ である．このようにしてわれわれは $\mathscr{D}$ に虚部が現われることと，示された中間状態とのあいだの既知の関係 ((108.4) から) がユニタリー性の必然の要求の結果であることを見た．

先へいってわれわれは，摂動論にしたがって関数 $\mathscr{D}(t)$ (あるいは，同じことだが関数 $\mathscr{P}(t)$) の実際の計算は $\mathscr{P}$ の虚部の計算から始めれば便利であることを知るだろう．このときには発散式は現われない．しかしもしもつぎに関数 $\mathscr{P}(t)$ を (108.8) の型の分散公式にしたがって計算すると積分は発散し，条件 $\mathscr{P}(0)=0$ および $\mathscr{P}'(0)=0$ を満足させる目的で付加的な差し引きの操作をする必要がでてくる．しかしながら，この差し引きは発散積分にあらわな操作をすることなしに行なうことができる．このためには，分散式 (108.8) を関数 $\mathscr{P}(t)$ 自体ではなく，関数 $\mathscr{P}(t)/t^2$ に適用すれば十分である．このとき $\mathscr{P}(t)$ は

$$\mathscr{P}(t) = \frac{t^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\mathscr{P}(t')}{t'^2(t'-t-i0)}dt' \tag{108.13}$$

の形に表わされる．この積分はもう収束する．そしてこのようにして得られた関数 $\mathscr{P}(t)$

1) 振幅 T_{fi} と M_{fi} との違いは単なる因子だけであることを思い出そう．(65.10)参照．

は自動的に要求される条件を満たしている[1].

§109.　ファインマン積分の正則化

前節で考察されたくりこみの物理的条件を使うと，すべての電磁的過程を摂動論の任意の近似で計算するときに，その振幅を一意的な方法で有限にすることができる．

まず第一に，ファインマン図形にしたがって直接に書かれた積分に現われる発散の性質を詳しく調べよう．この目的に対する重要な指摘は，これらの積分の被積分関数に含まれる仮想的 4－運動量の冪の総数を与えることである．

N_e 個の電子外線と N_γ 個の光子外線をもつ n 次の（すなわち，n 個の頂点をもつ）図形を考察しよう．数 N_e は偶数で，電子線は各外端で始まりかつ終っている $N_e/2$ 個の連続的な線を形成している．これらの連続的な線のなかの電子内線の数はその上の頂点の数より一つだけ少ない．したがって，図形のなかの電子内線の数は

$$n-\frac{N_e}{2}$$

に等しい，各頂点からは1個の光子線が出ている．N_γ 個の頂点では光子線は外線で，残りの $n-N_\gamma$ 個は内線である．各光子内線は二つの頂点を結びつけているので，このような線の総数は

$$\frac{n-N_\gamma}{2}$$

に等しい．

各光子内線には因子 $D(k)$ が対応し，これは k の2乗冪を含んでいる．各電子内線には因子 $G(p)$ が対応し，これは（$p^2 \gg m^2$ のとき）p の1乗冪を含んでいる．このようにして，図形の分母のなかの 4－運動量の冪の総数は

$$2n-\frac{N_e}{2}-N_\gamma$$

1）（108.13）の形の関係式を《2重差し引きの》分散式と言う．これに使われた関数 $\mathscr{P}(t)/t^2$ への移行の意味は（108.13）をつぎの形に書けば，特に直観的である．

$$\mathscr{P}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\mathscr{P}(t')\,dt'}{t'-t-i0}-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\mathscr{P}(t')}{t'}\,dt'-\frac{t}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\mathscr{P}(t')}{t'^2}\,dt'.$$

もしも最初の（《非正則の》）積分を $\bar{\mathscr{P}}(t)$ と書けば，右辺のすべての式は

$$\bar{\mathscr{P}}(t)-\bar{\mathscr{P}}(0)-t\bar{\mathscr{P}}'(0)$$

に等しい．

に等しい.

図形中の（d^4p あるいは d^4k についての）積分の数は，内線の数から，仮想的運動量に課される付加条件の数 $n-1$ を差し引いたものである（頂点における n 個の保存則のなかで，1個は図形の外端を結びつけている）. さらに4倍にして，4－運動量の全成分についての積分の数は

$$2(n-N_e-N_\gamma+2)$$

となる.

最後に，積分の数と被積分関数の分母のなかの運動量の乗冪の数との差（これを r と置く）は

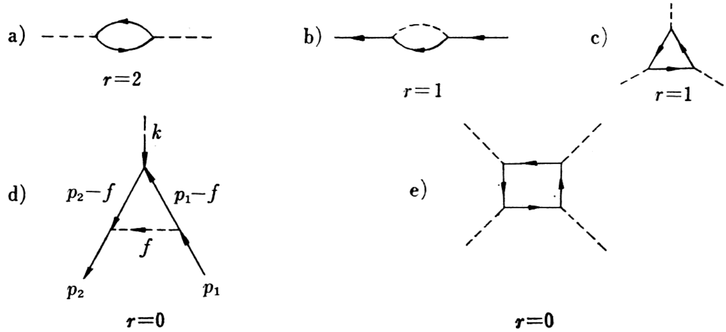
$$r=4-\frac{3}{2}N_e-N_\gamma \tag{109.1}$$

に等しい. この数が図形の次数 n には依存しないことを指摘しよう.

全体としての図形に対して $r<0$ の条件は，一般的に言って，積分の収束には不十分である. 図形から分割できるはずの内部ブロックに対する類似の数 r' が負になることが必要である. $r'>0$ であるようなブロックが存在すると，このとき図形の残りの積分がたとえ《過剰》収束をしても，それは発散してしまう. しかしながら，$r<0$ の条件は，$n=N_e+N_\gamma$ であり全体でただ一つの積分 d^4p があるような，最も簡単な図形の収束に対しては十分である.

もしも $r\geqslant 0$ ならば積分はあらゆる場合に発散する. この際，発散の次数は r が偶数ならば r より小さくはなく，もしも r が奇数ならば $r-1$ より小さくはない（あとの場合に発散の次数の1だけの減少は，全4－空間での積分の際に，奇数個の4－ベクトルの積の積分が0になることに関係している）. $r'>0$ の内部ブロックがあると発散の次数は大きくなる。

N_e および N_γ は正整数であるから，(109.1) からわかるように $r\geqslant 0$ になるような，これらの数値の対はわずか数個しかない. これらの型のおのおのの最も簡単な図形を列挙しよう. しかし同時にこれから $N_e=N_\gamma=0$（真空の環）および $N_e=0$, $N_\gamma=1$（真空電流の平均値）は除外しよう. なぜかというと§100ですでに示したように，物理的意味がないし，またこれらに対応する図形は棄てなければならないからである. 残りの場合はつぎのようになる.



(109.2)

これらの場合のなかで，第一のものは発散の次数が２次で，他のすべて ($r=0$ あるいは $r=1$) は対数的である．

図形 (109.2, d) は頂点演算子に対する最初の補正項である．これは条件 (107.19) を満足しなければならない．それはここでは

$$\bar{u}(p)\Lambda^{\mu}(p,p;0)u(p)=0 \qquad (p^2=m^2 \text{ のとき}) \tag{109.3}$$

の形になる．ここで

$$\Lambda^{\mu}=\Gamma^{\mu}-\gamma^{\mu}. \tag{109.4}$$

図形から直接書かれたファインマン積分を $\bar{\Lambda}^{\mu}(p_2,p_1;k)$ で表わそう．この積分は対数的に発散し，それ自体条件 (109.3) を満足しない．しかしながら，つぎのような差

$$\Lambda^{\mu}(p_2,p_1;k)=\bar{\Lambda}^{\mu}(p_2,p_1;k)-\bar{\Lambda}^{\mu}(p_1,p_1;0)|_{p_1^2=m^2} \tag{109.5}$$

をつくると，この条件を満たす量が得られる．積分 $\Lambda^{\mu}(p_2,p_1;k)$ のなかの主な発散項は被積分式中で光子の４－運動量 f が十分に大きい量であると考えれば求められる．それは

$$-4\pi ie^2\int\frac{\gamma^{\nu}\hat{f}\gamma^{\mu}\hat{f}\gamma_{\nu}}{f^2\cdot f^2\cdot f^2}\frac{d^4f}{(2\pi)^4}$$

の形になる[1]．そして外線の４－運動量の値に依存する．したがって，差 (109.5) のなかで発散の次数が小さくなり有限の値が得られる．差し引きにより発散を消去するこのような操作を積分の**正則化**と呼ぶ．

積分 $\Lambda^{\mu}(p_2,p_1;k)$ の１回の差し引きによる正則化は，この場合発散が対数的であること，すなわち起こりうるすべての場合のなかで最も弱いために可能であることを強調しておこう．もしも積分が別の次数の発散をもつならば，$k=0$ のとき１回の差し引きでは，すべての発散項を消去するには不十分であることがわかるであろう．

---

1) 積分の完全な表式は，§114 に書かれている ((114.2) 参照)．

Γ^μ に対する最初の補正（すなわちΛ^μ の展開の第1項）を決定したあとで，電子伝播関数の最初の補正（図形（109.2, a））はウォードの恒等式（105.8）にしたがって計算することができる．これはまた

$$\frac{\partial \mathcal{M}(p)}{\partial p_\mu} = \Lambda^\mu(p, p\,;\,0) \tag{109.6}$$

の形に書くことができる．ここで $\mathcal{G}$ の代りに質量演算子 $\mathcal{M}$ を，また Γ^μ の代りに Λ^μ を導入した．この方程式は（107.20）から出る境界条件

$$\bar{u}(p)\mathcal{M}(p)u(p) = 0 \qquad (p^2 = m^2 \text{ のとき}) \tag{109.7}$$

のもとで積分する必要がある．

最後に，偏りの演算子の展開の第1項の計算のために恒等式（105.14）に着目しよう．2対の添字について縮約したのちに，方程式

$$\frac{3}{4\pi}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial k_\sigma \partial k^\sigma} = 2\mathcal{S}$$

を得る．これはスカラー関数 $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\mu_\mu/3$ および $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mu\rho}{}^{\rho\mu}$ を結びつけるものである．これら二つの関数はスカラー変数 k^2 のみに依存する．したがって

$$2k^2\mathcal{P}''(k^2) + \mathcal{P}'(k^2) = \frac{4\pi}{3}\mathcal{S}(k^2) \tag{109.8}$$

になる．ここでダッシュは k^2 についての微分を意味している．条件 $\mathcal{P}'(0) = 0$ があるので，この方程式から

$$\mathcal{S}(0) = 0 \tag{109.9}$$

でなければならないことは明らかである．

摂動論の1次近似では $\mathcal{S}(k^2)$ は図形（109.2, b)（端の 4－運動量 k, k, 0, 0 をもつ）で定義される．これに対応するファインマン図形（これを $\bar{\mathcal{S}}(k^2)$ と置こう）は対数的に発散する．そしてその正則化は条件（109.9）にしたがった1回の差し引き

$$\mathcal{S}(k^2) = \bar{\mathcal{S}}(k^2) - \bar{\mathcal{S}}(0)$$

で実現される．このあとで，$\mathcal{P}(k^2)$ は境界条件 $\mathcal{P}(0) = 0, \mathcal{P}'(0) = 0$ をもつ方程式（109.8）の解として決定される．

摂動論のつぎの近似では，頂点演算子の補正 ($\Lambda^{(2)}_\mu$) は図形（103.10, c～i）で定義される．これらのなかの既約のもの（103.10, d～f）は1次近似の補正 $\Lambda^{(1)}_\mu$ の計算のときと同様に，（109.5）にしたがった1回の差し引きを使った積分の正則化によって計算される．

可約図形はもっと次数の低い内部自己エネルギー部分および頂点部分を含んでいて，ただちに1次近似の既知の(正則化された)量($\mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{M}^{(1)}, \Lambda_{\mu}^{(1)}$)で置き換えられ，そのあとで得られた積分はふたたび(109.5)にしたがって正則化される[1]．補正 $\mathcal{P}^{(2)}$ および $\mathcal{M}^{(2)}$ はその後，方程式(109.6)および(109.8)を使って計算される．

上記の系統的な手続きは，原理的には摂動論の任意の近似で $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ および Λ_{μ} に対する有限の式を得る可能性を与える．それにしたがって，ブロック $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$, Λ_{μ} が構成部分として含まれるような図形で記述される散乱の物理的過程の振幅の計算ができるようになる．

このようにして，前に(§108)確立された物理的条件が，理論で出会うすべてのファインマン図形の一意的な正則化であることがわかる．この事情はけっして量子電気力学の無意味な性質ではなく，**くりこみ可能性**という名をもっている[2]．

しかしながら，輻射補正の実際の計算のために上記の手続きは最も簡単で合理的な方法ではない．特に，次章ではわれわれは，目的に適した方法は対応する量の虚部の計算から始められることを見るだろう．この部分は発散を含まない積分で与えられる．その後すべての量は全体として，分散式を使い解析接続によって定義される．これによって，差し引きによる直接の正則化に対して要求される膨大な計算を避けることが可能になることがわかる．

---

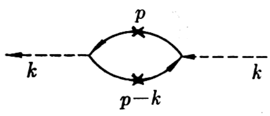
1) もっと高次の近似の図形のなかで，すでに正則化された値で置き換えた《4端子》ブロック $\mathcal{S}$ が必要になることがわかる．

2) 量子電気力学でのくりこみ可能性の数学的に厳密な基礎づけはつぎの著書に与えられている．
エヌ・エヌ・ボゴリューボフ，デ・ヴェ・シルコフ《場の量子論入門》Гостехиздат, 1957 (英訳; *Introduction to the Theory of Quantized Field*, Interscience, Wiley, New York, 1959).

第12章　輻射補正

§ 110.　偏りの演算子の計算

輻射補正の実際の計算に移り，まず偏りの演算子の計算から始めよう (J. Schwinger, 1949; R. P. Feynman, 1949)．摂動論の1次近似では図形



(110. 1)

のなかの環で与えられる．

すでに指摘してあるように，もしも求める関数の虚部の計算から始めれば，問題は簡単になる．今度は，この計算はユニタリー関係式を使ってやるのが最も便利である．この際，仮想的光子線は，想像上の《現実の》粒子，すなわち質量 $M^2 = k^2$ をもち，光子と同じ法則にしたがって電子と相互作用をするベクトル・ボソンに対応するものとみなされる．そうすることにより (110. 1) は《現実の》過程の図形になり，それにユニタリー条件を適用してもよいことになる．

このようにして，(110. 1) をボソンの電子－陽電子対への崩壊を経由する自分自身への遷移振幅 (S－行列の対角要素) の図形とみなそう．図形 (110. 1) の上の十文字は，ユニタリー関係式を適用するときに現われる中間状態を示すために，二つの部分に切り離すときには，このような線で行なわなければいけないことを示している．この状態は 4－運動量 $p_- = p$ をもつ電子，および $p_+ = -(p-k)$ をもつ陽電子を含んでいる．

2粒子性中間状態のユニタリー関係式 (72. 4) は，始めと終りの状態が一致するとき

$$2\,\mathrm{Im}\,M_{ii} = \frac{|\boldsymbol{p}|}{(4\pi)^2\varepsilon}\sum_{偏り}\int |M_{ni}|^2\,do \tag{110.2}$$

となる．

ここで図形 (110. 1) にしたがってつくられた振幅 M_{ii} は

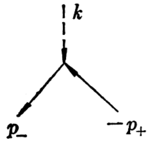
$$iM_{ii} = \sqrt{4\pi}\, e_\mu^* \cdot \sqrt{4\pi}\, e_\nu \frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \tag{110.3}$$

である．ここで e_μ はボソンの偏りの 4－ベクトルである．(14.13) にしたがって，これは方程式

$$e_\mu k^\mu = 0$$

を満足する．

振幅 M_{ni} は，ボソンの対への崩壊の図形



に対応する．これに対応する式は

$$M_{ni} = -e\sqrt{4\pi}\, e_\mu j^\mu, \quad j^\mu = \bar{u}(p_-)\gamma^\mu u(-p_+) \tag{110.4}$$

である．

(110.3)，(110.4) を (110.2) に代入して

$$2e_\mu^* e_\nu \operatorname{Im} \mathcal{P}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\sum_{偏り} j^{\mu *} j^\nu e_\mu^* e_\nu \tag{110.5}$$

を得る．ここで $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_- = -\boldsymbol{p}_+$ および $\varepsilon = \varepsilon_+ + \varepsilon_- = 2\varepsilon_+$ は対の重心系での運動量と全エネルギーである．積分は $\boldsymbol{p}$ の方向について行なわれ，和は両粒子の偏りについて行なわれる．

つぎに等式 (110.5) の両辺をボソンの偏りについて平均しよう．平均は公式

$$\overline{e_\mu^* e_\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$

を使って行なわれる（先の (110.5) 参照)．テンソル $\mathcal{P}^{\mu\nu}$ とベクトル j^μ の横波の性質 ($\mathcal{P}^{\mu\nu}k_\nu = 0$, $j^\mu k_\mu = 0$) に注意し，$\mathcal{P}_\mu^\mu = 3\mathcal{P}$ の置き換えを行ない，結果として

$$2\operatorname{Im}\mathcal{P} = \frac{1}{12\pi}\frac{|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon}\sum_{偏り}\int (jj^*)\,do \tag{110.6}$$

を得る．

偏りについての和は普通のとおりに行ない，do についての積分は 4π を掛けることになり，その結果

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathscr{P} = e^2\frac{|\boldsymbol{p}|}{3\varepsilon}\,\mathrm{Sp}\,\gamma_\mu(\hat{p}_- + m)\gamma^\mu(\hat{p}_+ - m) = -\,e^2\frac{8|\boldsymbol{p}|}{3\varepsilon}(p_+p_- + 2m^2)$$

となる．変数

$$t = k^2 = (p_+ + p_-)^2 = 2(m^2 + p_+p_-) \tag{110.7}$$

を導入しよう．そうすると

$$\varepsilon^2 = t,\quad \boldsymbol{p}^2 = \frac{t}{4} - m^2$$

となる．$\mathrm{Im}\,\mathscr{P}$ に対する最終的な式はつぎのようになる．

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{P}(t) = -\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}(t+2m^2)\qquad (t \geqslant 4m^2). \tag{110.8}$$

$t = 4m^2$ という値は，仮想的光子による電子－陽電子対生成のしきい値である（43頁の脚注参照）．この場合の摂動論の近似では（$\sim e^2$），1個の対をもつ状態は，ユニタリー条件 (110.2) の中間状態として現われることができる唯一のものである．それゆえ，この同じ近似では $t < 4m^2$ のときに，(110.2) の右辺は0に等しく，したがって

$$\mathrm{Im}\,\mathscr{P}(t) = 0\qquad (t < 4m^2) \tag{110.9}$$

となる．

この理由で今考えている近似では複素 t－平面で関数 $\mathscr{P}(t)$ に対する切断は，点 $t = 4m^2$ から実軸上に伸びている．この点は分散積分 (108.13) の下限とならなければならない．このようにして

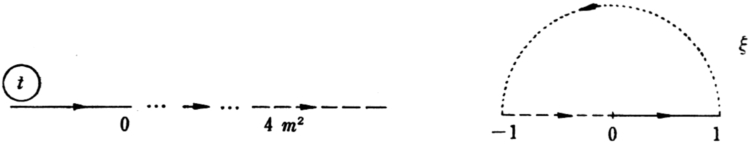
$$\mathscr{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi}t^2\int_{4m^2}^{\infty}\frac{dt'}{t'-t-i0}\sqrt{\frac{t'-4m^2}{t'}}\frac{t'+2m^2}{t'^2} \tag{110.10}$$

となる．

これから先の計算には，t の代りに他の変数を導入するとつごうがよい．それは

$$\frac{t}{m^2} = -\frac{(1-\xi)^2}{\xi} \tag{110.11}$$

によって定義される．この変換は，複素 t－平面の上半平面を，複素 ξ－平面の上半平面



第 18 図

上の半径1の半円に写像する．これは第18図に示されている（両平面上の，互いに対応する線分は同じ種類の破線で描かれている）．非物理的領域 ($0 \leqslant t/m^2 \leqslant 4$) はここでは半円 $\xi = e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ に対応する．物理的領域 ($t < 0$ および $t/m^2 > 4$) は左右の実の半径に対応する．

積分 (110.10) は置き換え

$$\frac{t'}{m^2} = \frac{(1+\xi')^2}{\xi'}, \quad \frac{dt'}{m^2} = -\frac{(1-\xi'^2)\,d\xi'}{\xi'^2}$$

を使って計算するのが最も簡単である．はじめは $t<0$ の場合を考える（ここで積分領域で分母は0にはならない．そして虚数の付加項 $i0$ は落としてもよい）．変数 ξ を使って表わされた積分の結果は

$$\mathcal{P}(\xi) = \frac{\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{22}{3} + \frac{5}{3}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + \left(\xi + \frac{1}{\xi} - 4\right)\frac{1+\xi}{1-\xi}\ln\xi\right\} \tag{110.12}$$

である．この公式の解析接続は，$t > 4m^2$ の領域の関数 $\mathcal{P}(t)$ を定義する．このためにそのなかで $\xi = |\xi|e^{i\pi}$ と置かなければならない（このとき対数が虚部に寄与を与える．すなわち $\ln\xi = \ln|\xi| + i\pi$）[1]．非物理的領域に対しては $\xi = e^{i\varphi}$ と置く必要がある．このとき

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\alpha m^2}{3\pi}\left\{-\frac{5}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2} - 4 + \left(2 + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\varphi\,\mathrm{ctg}\,\frac{\varphi}{2}\right\},$$
$$\frac{t}{4m^2} = \sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{110.13}$$

$|t|$ の小さい極限（すなわち $\xi \to 1$）の場合，この公式は

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{t^2}{m^2} \qquad (|t| \ll 4m^2) \tag{110.14}$$

を与える．逆に $|t|$ が大きい極限（すなわち $\xi \to 0$）の場合には

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\alpha}{3\pi}|t|\ln\frac{|t|}{m^2} \qquad (-t \gg 4m^2)$$
$$\mathcal{P}(t) = \frac{\alpha}{3\pi}t\left(\ln\frac{t}{m^2} - i\pi\right) \qquad (t \gg 4m^2) \tag{110.15}$$

を得る．

摂動論の意味にしたがって，得られた公式は $\mathcal{P}/4\pi \ll D^{-1} = t/4\pi$ である限りは正しい．したがって公式 (110.15) の適用可能の条件は

1）このようにして行なう解析接続は，要求されるように，切断の上の縁への接続である．なぜかというと，ξ-平面上の半円は t の上半平面に対応するからである．

$$\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|t|}{m^2}\ll 1 \tag{110.16}$$

である.

§ 111. クーロンの法則に対する輻射補正

得られた公式をクーロンの法則に対する輻射補正の問題に適用しよう．この補正は直観的には点電荷のまわりの**真空の偏り**の結果として記述される．

補正を勘定に入れないと，動かない（電荷 e_1 をもつ）中心の場はクーロン・スカラー・ポテンシャル $\Phi\equiv A_0^{(e)}=e_1/r$ で与えられる．これの 3 次元フーリエ展開の成分は

$$\Phi(\boldsymbol{k})\equiv A_0^{(e)}(\boldsymbol{k})=\frac{4\pi e_1}{\boldsymbol{k}^2}$$

である．輻射補正を勘定に入れると，この場は《有効場》

$$\mathcal{A}_0^{(e)}=A_0^{(e)}+\mathcal{D}_{0\rho}\frac{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}{4\pi}A_\lambda^{(e)}=A_0^{(e)}+\frac{1}{4\pi}\mathcal{P}\mathcal{D}A_0^{(e)} \tag{111.1}$$

で置き換えられる（(100.15) 参照)．第 2 項はスカラー・ポテンシャルに対する求める付加項を与える．摂動論の 1 次近似で $\mathcal{P}(k^2)$ に対して，前節で得られた式を使わなければならない．しかし関数 $\mathcal{D}(k^2)$ はそのゼロ近似

$$\mathcal{D}(k^2)\approx D(k^2)=-\frac{4\pi}{\boldsymbol{k}^2}$$

で置き換える．このようにして，場のポテンシャルに対する輻射補正は

$$\delta\Phi(\boldsymbol{k})=-\frac{4\pi e_1}{(\boldsymbol{k}^2)^2}\mathcal{P}(-\boldsymbol{k}^2) \tag{111.2}$$

である．

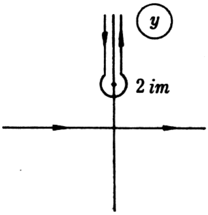
この補正の座標表示での形を決定するために，逆フーリエ変換を行なう

$$\delta\Phi(\boldsymbol{r})=\int e^{i\boldsymbol{kr}}\,\delta\Phi(\boldsymbol{k})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{111.3}$$

$\delta\Phi(\boldsymbol{k})$ はただ $t=-\boldsymbol{k}^2$ だけの関数であるから，角度についての積分を行なって

$$\delta\Phi(r)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\delta\Phi(t)\frac{\sin(r\sqrt{-t})}{r}d(-t)=\frac{1}{4\pi^2 r}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty\delta\Phi(-y^2)e^{iry}y\,dy$$

を得る（最後の変形は $y=\sqrt{-t}$ の関数として被積分関数が偶関数であることが使われている)．今度は複素変数 y の上平面内で積分路を動かして，それを関数 $\mathcal{P}(-y^2)$ の切断で置き換えることができる（第 19 図)．この切断は点 $2im$ で始まり，虚軸に沿って上



第 19 図

に伸びている（ここで物理的葉は切断の左の縁に対応する）．
$y = ix$ によって y の代りに新しい変数を導入して

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{2m}^{\infty} \mathrm{Im}\,\delta\Phi(x^2)e^{-rx}x\,dx$$

を得る．最後に $t = x^2$ についての積分にもどり，最終的に

$$\delta\Phi(r) = \frac{1}{4\pi^2 r}\int_{4m^2}^{\infty} \mathrm{Im}\,\delta\Phi(t)e^{-r\sqrt{t}}\,dt \qquad (111.4)$$

を得る．虚部

$$\mathrm{Im}\,\delta\Phi(t) = -\frac{4\pi e}{t^2}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{P}(t)$$

は（110.8）からとってくる．そして簡単な変数変換ののち

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left\{1 + \frac{2\alpha}{3\pi}\int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\,d\zeta\right\} \qquad (111.5)$$

が得られる（E. Uehling, R. Serber, 1935）．

ここに含まれる積分は，二つの極限の場合に計算することができる．

まず第一に r が小さい場合（$mr \ll 1$）を考察しよう．括弧内の第1項の積分を二つに分ける．

$$I = \int_1^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\,d\zeta = \int_1^{\zeta_1}\cdots d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\infty}\cdots d\zeta \equiv I_1 + I_2.$$

ここで ζ_1 は $1/mr \gg \zeta_1 \gg 1$ であるように選ばれる．こうすると第1の積分内では $r = 0$ と置くことができる．このとき

$$I_1 \approx \int_1^{\zeta_1}\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\,d\zeta \approx \ln 2\zeta_1 - 1.$$

I_2 のなかでは逆に，平方根内の1を無視して

$$I_2 \approx \int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta} = -\ln\zeta_1\cdot e^{-2mr\zeta_1} + 2mr\int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-2mr\zeta}\ln\zeta\,d\zeta$$

となる．指数および積分の下限では $\zeta_1 = 0$ と置いてもよい．その後，変数変換 $2mr\zeta = x$ を行なって

$$I_2 = -\ln 2\zeta_1 + \ln\frac{1}{mr} + \int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx = -\ln 2\zeta_1 + \ln\frac{1}{mr} - C$$

を得る．ここで $C = 0.577\cdots$ はオイラーの定数である．（111.5）の第2項の積分では，ただちに $r = 0$ と置いてもよい．

$$I_3 \approx \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^4}\,d\zeta = \frac{1}{6}.$$

三つの積分全部を加えて（このとき補助的な数 ζ_1 は落ちてしまう）

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1+\frac{2\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{1}{mr}-C-\frac{5}{6}\right)\right] \qquad \left(r \ll \frac{1}{m}\right) \tag{111.6}$$

となる.

$mr \gg 1$ のとき，積分内では $\zeta-1\sim 1/mr \ll 1$ の領域が重要である．$\zeta=1+\xi$ と置き換え，適当な省略を行なうと積分

$$e^{-2mr}\int_0^\infty e^{-2mr\xi}\,\frac{3}{2}\sqrt{2\xi}\,d\xi = \frac{3}{8(mr)^{3/2}}\sqrt{\pi}\,e^{-2mr}$$

になる．このようにしてこの場合には

$$\Phi(r) = \frac{e_1}{r}\left(1+\frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}}\right) \qquad \left(r \gg \frac{1}{m}\right) \tag{111.7}$$

となる[1)].

われわれは，真空の偏りが $r\sim 1/m$ $(=\hbar/mc)$ の領域で点電荷のクーロン場をゆがめることを見た．m は電子の質量である．この領域の外では場のゆがみは指数関数的に減少する.

ここでもう一つ一般的性質をもつある注意をしよう．これまでのところ，輻射補正は光子場と電子－陽電子場との相互作用から起こるものとされてきた．したがって，光子の自己エネルギー型の図形のなかの内部の閉じた環を電子環とすると，光子と《電子真空》との相互作用を考慮したことになる．しかし光子は他の粒子の場とも相互作用をする．これらの場の《真空》との相互作用は，対応する粒子の閉じた環のある自己エネルギー型図形によって記述される．これらの図形の寄与は，電子の図形の寄与と大きさの程度からいって，比 m_e/m のある乗冪だけ異なっている．ここで m は与えられた粒子の，m_e は電子の質量である.

質量が電子に最も近い粒子はミューオンやパイオンである．比 m_e/m_μ および m_e/m_π は α に近い．したがって，これらの粒子からの輻射補正は電子によるつぎの次数の補正とともに考慮しなければならない．しかしたとえミューオンに対しては，現在ある理論を使った輻射補正の計算が許されても，(強い相互作用をする粒子である) パイオンに対して

1) $\delta\Phi(r)$ のなかの因子 e^{-2mr} の由来は，出発点の積分 (111.4) からすでに明らかである．r が大きいときには，そこでは下限に近い t の値が重要になる．言いかえれば，指数因子の指数は，関数 $\delta\Phi(t)$ の初めの特異点の位置によって決定される.

はこれは許されない．

この事情があるので，現存の量子電気力学で具体的な効果の正確な計算の可能性は原理的に制限される．光子－電子の相互作用一つだけを十分な高次近似の補正まで考えることは許容精度を越えている．

この節で考察されたクーロンの法則への輻射補正は，すでに見てきたように $r \lesssim 1/m_e$ の距離の領域までひろげられる．今は，得られた公式が $r < 1/m_\mu$（あるいは $1/m_\pi$）の距離では不十分であると付け加えることができる．ここでは他の粒子による真空の偏りの効果もまた存在するわけである．

§112. ファインマン積分による偏りの演算子の虚部の計算

摂動論の1次近似で図形（図形（110.1）のなかの環）にしたがって計算をするとき，偏りの演算子は積分

$$\frac{i\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\pi} \longrightarrow -e^2\int \mathrm{Sp}\,\gamma^\mu G(p)\gamma^\nu G(p-k)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \qquad (112.1)$$

になる．しかしながら，この積分は，4次元の p－空間全体で積分すると2乗の発散をする．有限の結果を得るためには，§109で述べられている法則にしたがって正則化が行なわれなければならない．

われわれはこれの完全な導き方をここで再現することはやめよう．その代りに積分（112.1）にしたがってどのように偏りの演算子の虚部の計算ができるかを示そう（これは§110でユニタリー条件を使って定義されている）．この導き方のなかには教育的なものをたくさん含んでいる．

積分（112.1）の虚部は発散を含まない．したがって正則化を要しない．スカラー関数 $\mathrm{Im}\,\mathcal{P} = (1/3)\,\mathrm{Im}\,\mathcal{P}^\mu_\mu$ に対しては

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{P} = \mathrm{Im}\left\{i\frac{4\pi e^2}{3(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{Sp}\,\gamma^\mu(\hat{p}+m)\gamma_\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)}{(p^2-m^2+i0)\,[(p-k)^2-m^2+i0]}\,d^4p\right\}$$

となる（簡単のためこれから先の中間的な式では記号 Im を落とし，この積分の実部の発散には目をつぶることにする）．跡を計算したのち積分は

$$\mathcal{P}(k^2) = \int\frac{i\varphi(p)\,d^4p}{(p^2-m^2+i0)\,[(p-k)^2-m^2+i0]},$$
$$\varphi(p) = \frac{2e^2}{3\pi^3}(2m^2+pk-p^2) \qquad (112.2)$$

の形になる．

$k^2>0$ とし，$k=(k_0, 0)$ であるような基準系に移ろう．この系では

$$(p-k)^2=(p_0-k_0)^2-\boldsymbol{p}^2$$

である．また記号 $\varepsilon=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$ （ε は仮想的電子 p_0 の《エネルギー》とは一致しない！）を導入し，(112.2) を

$$\mathcal{P}(k^2)=\int d^3p\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\frac{i\varphi(p_0,\boldsymbol{p})}{(p_0^2-\varepsilon^2+i0)[(p_0-k_0)^2-\varepsilon^2+i0]},$$
$$\varphi(p_0,\boldsymbol{p})=\frac{2e^2}{3\pi^3}(m^2+\varepsilon^2+p_0k_0-p_0^2) \qquad (112.3)$$

の形に書き直そう．

被積分関数は変数 p_0 について，つぎの四つの極をもつ．

a) $p_0=\varepsilon-i0$, a′) $p_0=-\varepsilon+i0$,

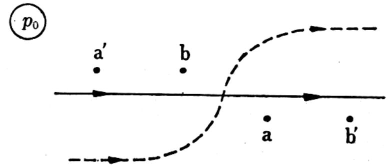
b) $p_0=k_0-\varepsilon+i0$, b′) $p_0=k_0+\varepsilon-i0$.

第20図上にこれらの極の位置が示されている．はっきりさせるために $k_0>0$ と考えよう（最終的な答は k_0^2 の関数であって k_0 の符号には依存しない）．複素変数 $t=k^2=k_0^2$ の上の切断，あるいは同じことだが複素 k_0－平面内の実軸上で，関数 $\mathcal{P}(t)$ がもつ不連続を計算しよう．関数 $\mathcal{P}(t)$ の実部は切断上で連続である．したがって不連続は

$$\Delta\mathcal{P}(t)=2i\,\mathrm{Im}\,\mathcal{P}(t) \qquad (112.4)$$

である．

まず第一に，どうやって積分の形から切断の位置を決めることができるかを示そう．(112.3) の内側の積分（dp_0 についての積分）を $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ と置こう．第20図の上と下の極が互いに有限の距離にある限りは，p_0 についての積分路は極からはなれて引くことができる（図の破線）．したがって，この場合には明らかに，極 b, b′ を実軸に対して下方あるいは上方に無限小だけずらしても，すなわち $k_0\to k_0\pm i\delta$, $\delta\to 0$ としても積分 $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ は変わらない．言いかえれば，$I(\boldsymbol{p}, k_0)$ の値は k_0 を上あるいは下からその実数値に近づけても同じである．したがって $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ は不連続 $\Delta\mathcal{P}$ には寄与をしない．もしも二つの極（$k_0>0$ のときは，これは極 a および b でよい）の一方が他の真下にあるとすれば，そのときだけは事情が変わってくる．積分路はそれらのあいだで《つぶされ》てしまい引けなくなる．このようにして，もしも積分領域のどこかで条件 $k_0-\varepsilon=\varepsilon$ が満足される



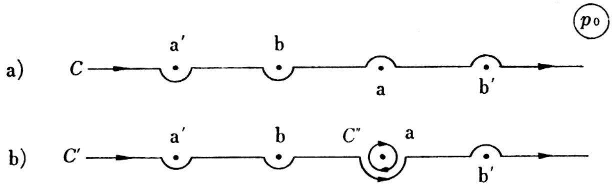
第 20 図

こと，すなわち $k_0 = 2\varepsilon = 2\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ となることが可能ならば，不連続 $\Delta\mathscr{P} \neq 0$ である．このために $k_0 \geqslant 2m$，すなわち $t \geqslant 4m^2$ でなければならないことは明らかである[1]．

項 $i0$ を落とし，それに対応して積分路を第 21 図に示された積分路 C に変えて，積分 $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ を

$$I(\boldsymbol{p}, k_0) = \int_C \frac{i\varphi(p_0, \boldsymbol{p})\, dp_0}{(p_0^2 - \varepsilon^2)\,[(p_0 - k_0)^2 - \varepsilon^2]} \tag{112.5}$$

の形に書こう．$\Delta\mathscr{P}(t)$ が現われるのは，積分路を極 a からはなすことができないことに



第 21 図

起因している（このとき積分路は a と b のあいだでおしつぶされる）．このことを考えに入れて，積分路 C を a 点の下を通る積分路 C' に変え，それに応じてこの点を回る小さい円に沿っての積分を加える（第 21 図 b)）．そのあと，積分路 C' は何の妨害もなく極からはなすことができ，したがってその上の積分は，関数 $\mathscr{P}(t)$ の正則部分だけへ寄与をする．求める跳び値を決定するには円 C'' に沿った積分のみを考察すれば十分である．これはつまり極 a における留数になる．この操作は被積分関数のなかで置き換え

$$\frac{1}{p_0^2 - \varepsilon^2} \longrightarrow -2\pi i\delta(p_0^2 - \varepsilon^2) \tag{112.6}$$

をすることにより実現される（負号は極のまわりの円が負方向に回っていることからきている）．このとき δ－関数の引数のなかで根 $p_0 = +\varepsilon$ だけを考慮すればよい（a′ ではなく極 a だけを回っている）．もしも運動量 4－空間の半分 $p_0 > 0$ だけで積分を行なうように約束すれば，この条件は自動的に考慮されたことになる．

置き換え (112.6) ののち，積分 $I(\boldsymbol{p}, k_0)$ の不連続は直接に計算される．

---

1) 同様に $t = k^2 < 0$ であって切断がないときにも確かめられる．この場合，$k = (0, \boldsymbol{k})$ であるような基準系を選び，被積分関数の極は

$$p_0 = \pm(\varepsilon - i0), \quad p_0 = \pm\left(\sqrt{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{k})^2 + m^2} - i0\right)$$

のところにある．下の二つの極は p_0 の右半平面上に，上の 2 極は左平面上にあり，したがってこれらの対はいずれも接近することはない．

$$\Delta I = \{I(\boldsymbol{p}, k_0 + i\delta) - I(\boldsymbol{p}, k_0 - i\delta)\}_{\delta\to+0}$$
$$= -2\pi i \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2)\, i\varphi(p_0, \boldsymbol{p}) \left[\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 + i\delta} - \frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 - i\delta}\right] dp_0.$$

等式 ((108.3) 参照)

$$\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 \pm i\delta} = \mathrm{P}\,\frac{1}{(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2} \mp i\pi\delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]$$

を使って

$$\Delta I = i(2\pi i)^2 \int_0^\infty \delta(p_0^2 - \varepsilon^2)\,\delta[(k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2]\varphi(p_0, \boldsymbol{p})\, dp_0$$

を得る．δ-関数の引数は，それに $\boldsymbol{p}^2$ を引いたり加えたりして，不変形に書き直すことができる．

$$p_0^2 - \varepsilon^2 = p^2 - m^2, \quad (k_0 - p_0)^2 - \varepsilon^2 = (k - p)^2 - m^2.$$

こうして最終的に

$$\Delta\mathcal{P}(k^2) = i(2\pi i)^2 \int_{p_0>0} d^4p\cdot\varphi(p)\,\delta(p^2 - m^2)\,\delta[(p - k)^2 - m^2] \qquad (112.7)$$

を得る．δ-関数のために，積分は超曲面

$$p^2 = m^2, \quad (p - k)^2 = m^2 \qquad (112.8)$$

の交わる領域だけで実際に行なわれる．この領域では 4-ベクトル p はすべて時間類似であるから，$p_0 > 0$ での積分条件は不変性をもっている（円錐 $p^2 = m^2$ の上の錐）．

(112.7) をもとの式 (112.2) とくらべよう．t 平面上の切断における関数 $\mathcal{P}(t)$ の不連続は，もとのファインマン積分で図形 (110.1) の環のなかの切りはなされた線に対応する伝播関数のなかで，置き換え

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \longrightarrow -2\pi i\delta(p^2 - m^2) \qquad (112.9)$$

をすることによって求められる (S. Mandelstam, 1958; R. Cutkosky, 1960).

条件 (112.8) は，図形上の仮想粒子線が現実の粒子に対応する（あるいは，いわゆる 4-運動量 p および $p-k$ が**質量超曲面**上にのる）ような運動量空間の領域を取り出すことに注目しよう．ここで，これらの線が中間状態にある現実の粒子線に換えられた，ユニタリー関係式の方法との関係が明らかになってくる．

われわれは図形の虚部に発散がない数学的原因もわかる．それはもとのファインマン積分のなかの無限の運動量 4-空間全体での積分の代りに，質量超曲面の有限の領域での積分で定義されるからである．

今度は (112.7) から §110 で導入された公式を得るために， $k=0$ であるような基準系にもどろう．そして

$$d^4 p = |\boldsymbol{p}|\,\varepsilon\, d\varepsilon\, dp_0\, do$$

についての積分を行なう．積分は δ-関数になる．この際

$$\delta(p^2-m^2)\,dp_0 = \delta(p_0^2-\varepsilon^2)\,dp_0 \longrightarrow \frac{1}{2\varepsilon}\delta(p_0-\varepsilon)\,dp_0$$

である．第2の δ-関数は

$$\begin{aligned}\delta[(p-k)^2-m^2]d\varepsilon &= \delta[(p_0-k_0)^2-\varepsilon^2]d\varepsilon \\ &= \delta(-2\varepsilon k_0+k_0^2)\,d\varepsilon \longrightarrow \frac{1}{2k_0}\delta\left(\varepsilon-\frac{k_0}{2}\right)d\varepsilon\end{aligned}$$

となる．結果として

$$\Delta\mathscr{P}(t) = -\frac{i\pi^2}{2}\int\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\,\varphi(\varepsilon,\boldsymbol{p})\,do \qquad (112.10)$$

を得る．ここで $t=k^2=k_0^2$ であり

$$p_0 = \varepsilon = \frac{k_0}{2},\quad \boldsymbol{p}^2 = \varepsilon^2-m^2 = \frac{k_0^2}{4}-m^2$$

のときの関数 φ の値をとる．すなわち

$$\varphi(\varepsilon,\boldsymbol{p}) = \frac{e^2}{3\pi^3}(2m^2+t)$$

に等しく，角度にはよらない．したがって， do についての積分は 4π を掛けることになり，そして (110.8) にもどることになる．

上述の導き方では，二つの線をすべて切ることによって，図形が二つに分けられることが重要である．したがって，定式化された法則は，二つの（電子あるいは光子）線で結ばれた任意の二つのブロックからなる図形に対してのみ使える．このとき置き換え (112.9) を使って計算された積分は，ユニタリー関係式の方法では2粒子性中間状態に対応する図形の虚部への寄与を決定する．

§113. 電子の電磁形状因子

二つの電子線が外線で，光子線が内線であるような場合に，頂点演算子 $\Gamma^\mu=\Gamma^\mu(p_2, p_1;k)$ を考察しよう．電子外線には因子 $u_1=u(p_1)$ と $\bar{u}_2=\bar{u}(p_2)$ とが対応し，したがって Γ は積

$$j^\mu_{fi} = \bar{u}_2\Gamma^\mu u_1 \qquad (113.1)$$

の形で図形中に現われる．すでに §108 で指摘したように，それは輻射補正を考慮に入れた電子遷移電流に他ならない．相対論的不変性およびゲージ不変性の要求から，この電流の行列構造を決めることができる．

電磁相互作用の演算子 $V = e(jA)$ は（擬スカラーでなく）真正スカラーであり，それはこの相互作用では空間的偶奇性が保存されることによって示される．したがって遷移電流 j_{fi} は（擬ベクトルでなく）真正ベクトルである．したがって，それはわれわれの手もとにある二つの 4-ベクトル p_1 および p_2（第3の $k = p_2 - p_1$）と，双スピノール u_1 および u_2 からつくられる真正ベクトルだけを使って表わすことができる．$\bar{u}_2$ および u_1 に双1次であるような独立な 4-ベクトルは全部で三つある．

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) p_2,$$

あるいは，同じことだが

$$\bar{u}_2 \gamma u_1, \quad (\bar{u}_2 u_1) P, \quad (\bar{u}_2 u_1) k \qquad (113.2)$$

である．ここで $P = p_1 + p_2$ である．ゲージ不変性の条件は，遷移電流が光子の 4-運動量 k に垂直であること，すなわち

$$j_{fi} k = 0 \qquad (113.3)$$

であることを要求する．4-ベクトル (113.2) のなかの初めの二つはこの条件を満足する．すなわち，第一のはディラック方程式

$$(\hat{p}_1 - m) u_1 = 0, \quad \bar{u}_2(\hat{p}_2 - m) = 0 \qquad (113.4)$$

を使って，また第二のは $Pk = 0$ からである．電流 j_{fi} はこれら二つの4-ベクトルの1次結合で表わされる．すなわち

$$j^{\mu}_{fi} = f_1(\bar{u}_2 u_1) P^{\mu} + f_2(\bar{u}_2 \gamma^{\mu} u_1)$$

である．ここで f_1 および f_2 は不変関数である．これらを電子の**電磁形状因子**と呼ぶ．

4-運動量 p_1 および p_2 は自由電子に関するものであるから，$p_1^2 = p_2^2 = m^2$ であり，三つの 4-ベクトル p_1, p_2, k（これらは等式 $k = p_2 - p_1$ で結ばれている）から，ただ一つ独立なスカラー変数をつくることができる．これには k^2 を選ぶことができる．そうすると形状因子は k^2 の関数になる．

電流に対する式は，二つの独立な項の別な選び方をして，別の形の式に表わすことができる．方程式 (113.4) と行列 γ の交換則を使って，容易に

$$(\bar{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_{\nu} = -2m(\bar{u}_2 \gamma^{\mu} u_1) + (\bar{u}_2 u_1) P^{\mu} \qquad (113.5)$$

を確かめることができる．$\sigma^{\mu\nu} = (\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})/2$ である．このような項の係数は，あと

でわかるように，重要な物理的意味をもっている．したがって

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2) \sigma^{\mu\nu} k_{\nu} \tag{113.6}$$

と書こう．ここで f，g は二つの別個の形状因子である．因子 $1/2m$ を分離することの意味は先にいって明らかになる[1]．簡単のために，われわれは電流の代りに頂点演算子を書こう．これは $\bar{u}_2 \cdots u_1$ で《はさまれている》としなければならないことは了解されているものとする．

形状因子の性質を明らかにするために，電子と外場との相互作用の過程の図形(107.16)を考察しよう．それに対応する散乱振幅は

$$M_{fi} = -e j^{\mu}_{fi} \mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k) \tag{113.7}$$

である．ここで $\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}$ は（真空との相互作用を考慮した）有効外場である．

振幅 (113.7) は二つの反応チャネルを記述する．散乱チャネルで不変変数は

$$t = k^2 = (p_2 - p_1)^2 \leqslant 0$$

である $p_2 \to p_-$，$p_1 \to -p_+$ の置き換えをすると，消滅型チャネルに移る．これは 4－運動量 p_- および p_+ をもつ対の生成に対応する．このチャネルでは

$$t = (p_- + p_+)^2 \geqslant 4m^2$$

である．$0 < t < 4m^2$ の値の領域は非物理的である．

ユニタリー条件 (108.12) にもどろう．散乱チャネル ($t < 0$) では，この場合物理的中間状態はない．すなわち，一つの自由電子はその運動量を変えることはない．あるいは何か他の粒子を生成することはできない．もちろん非物理的領域では中間状態はないのである．したがって，$t < 4m^2$ のときは等式 (108.12) の右辺はなくなるので，T_{fi}（あるいは同じことだが M_{fi}）はエルミートである．

$$M_{fi} = M^*_{if}.$$

始状態と終状態の交換は，p_2 と p_1 との交換，すなわち $k \to -k$ の置き換えを意味している．M_{fi} を (113.7) の形に表わして

$$j^{\mu}_{fi} \mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k) = j^{\mu *}_{if} \mathcal{A}^{(e)*}_{\mu}(-k)$$

を得る．ところが $\mathcal{A}^{(e)}(-k) = \mathcal{A}^{(e)*}(k)$ である．したがって，これから遷移電流の行列がエルミートであることが出る．つまり

---

1) 誤解を避けるために，定義 (113.6) で k が頂点に入射する光子線の 4－運動量であると仮定されていることを思い起こそう．出てゆく線に対しては，第 2 項の符号が逆になる．

$$j_{fi} = j_{if}^* \qquad (t < 4m^2 \text{ のとき}) \tag{113.8}$$

行列 γ の性質 (21.7) を使って，容易に

$$(\overline{u}_2 \gamma^\mu u_1) = (\overline{u}_1 \gamma^\mu u_2)^*,$$

$$(\overline{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) = -(\overline{u}_1 \sigma^{\mu\nu} u_2)^*$$

を確かめることができる．したがって j_{if}^* と j_{fi} との違いは関数 $f(t)$ と $g(t)$ とを複素共役に置き換えるだけである．そして等式 (113.8) からこれらの関数が実であることが出てくる．このようにして

$$\mathrm{Im}\, f(t) = \mathrm{Im}\, g(t) = 0 \qquad (t < 4m^2 \text{ のとき}) \tag{113.9}$$

となる．

消滅型のチャネル ($t > 4m^2$) では，状態 f は1個の対であり，これは別の運動量をもつ他の対に（弾性散乱），あるいは何かさらに複雑な系に転換することができる．したがって，ユニタリー条件の右の部分は0ではなく，行列 M_{fi} (これとともに j_{fi}) はエルミートではない．そして形状因子は複素数である．

関数 $f(t)$ および $g(t)$ の解析的性質は §108 で考察された関数 $\mathscr{P}(t)$ とまったく同様である（もっともこれを直接に証明することは面倒なことである）．これらの関数は，$t > 4m^2$ の正の実軸に沿って切断のある t－複素平面では解析的である．このとき

$$f^*(t) = f(t^*), \quad g^*(t) = g(t^*)$$

である．

くりこみ条件 (107.19) は頂点演算子 (113.6) に適用することができ，これは

$$f(0) = 1 \tag{113.10}$$

という要求に帰してしまう．この条件を自動的に満足するために（$f(t)$ をその虚部を使って計算するときに)，(108.8)の形の分散式を，関数 $f(t)$ 自身に対してではなく，$(f-1)/t$ に対して適用する必要がある．このとき《1回差し引いた》分散式

$$f(t) - 1 = \frac{t}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, f(t')}{t'(t'-t-i0)}\, dt' \tag{113.11}$$

を得る．

形状因子 $g(t)$ に対しては，物理的要求からはあらかじめいかなる値も指定されていない．したがって，これに対しては《差し引きなしで》分散式が書かれる．

$$g(t) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\, g(t')}{t'-t-i0}\, dt'. \tag{113.12}$$

$g(0)$ の値は重要な物理的意味をもっている．それは電子の磁気モーメントの補正を与え

る．これを確かめるために，空間的にゆるやかに変化する定磁場中での非相対論的電子の散乱を考察しよう．

散乱振幅（113.7）のなかで形状因子 $g(k^2)$ と関係がある項はつぎの形をしている．

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(k^2)(\overline{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1) k_\nu A^{(e)}_\mu (k). \tag{113.13}$$

純粋な磁場に対しては $A^{(e)\mu} = (0, \boldsymbol{A})$ である．場が時間に対して一定であることは，4-ベクトル $k^\mu = (0, \boldsymbol{k})$ であることを意味し，空間的に場がゆるやかに変化することは，$\boldsymbol{k}$ が小さいことに対応している（さきにいって $\boldsymbol{k} \to 0$ の極限に移ることを考えて，すでに（113.13）のなかで有効場 $\mathcal{A}^{(e)}$ の代りに $A^{(e)}$ と書いた）．（113.13）を展開し，3次元の量だけを使って表わして

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(-\boldsymbol{k}^2)(\overline{u}_2 \Sigma u_1)\, i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}]$$

を得る．ここで Σ は行列（21.21）である．ベクトル積 $i[\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}]$ を磁場の強さ $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ で置き換え，そのあとで $\boldsymbol{k} \to 0$ の極限に移ることができる．最後に，（23.12）にしたがって非相対論的スピノール振幅 w_1, w_2 を導入して

$$\overline{u}_2 = \sqrt{2m}\,(w_2^* \;\; 0), \quad u_1 = \sqrt{2m}\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，最終的に

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{2m} g(0)\, \boldsymbol{H}_k \cdot 2m (w_2^* \boldsymbol{\sigma} w_1) \tag{113.14}$$

になる．

この式をスカラー・ポテンシャル $\Phi_{\boldsymbol{k}}$ をもつ定電場での散乱振幅

$$M_{fi} = -e(\overline{u}_2 \gamma^0 u_1)\Phi_{\boldsymbol{k}} \approx -e\Phi_{\boldsymbol{k}} \cdot 2m(w_2^* w_1)$$

とくらべよう．磁場内の電子に対しては，付加的なポテンシャル・エネルギー

$$-\frac{e}{2m} g(0)\, \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$$

を付け加えればよいことがわかる．これは電子が《正常》磁気モーメント $e\hbar/2mc$ に加えて，《異常》磁気モーメント（普通の単位で）

$$\mu' = \frac{e\hbar}{2mc} g(0) \tag{113.15}$$

をもつことを意味している．

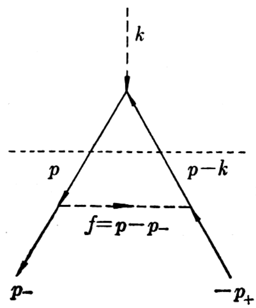
§114. 電子形状因子の計算

電子形状因子の実際の計算に取りかかろう (J. Schwinger, 1949).

摂動論のゼロ近似では頂点演算子は $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ である．すなわち，電子形状因子は

$$f = 1, \quad g = 0$$

である．形状因子に対する最初の輻射補正は（二つの現実の電子端と一つの仮想的光子端をもつ）頂点図形



(114.1)

で定義される．われわれは形状因子の虚部の計算から始めよう．前節で示されているように，それは消滅型チャネル ($k^2 > 4m^2$) でのみ 0 と異なる．これに対応して，図形 (114.1) の電子端の 4－運動量は生成される電子と陽電子に対応し，p_- および $-p_+$ と置かれる．図形 (114.1) の解析的な式は

$$\begin{aligned} &- ie\overline{u}(p_-)\Gamma^\mu u(-p_+) \\ &\quad = (-ie)^3 \overline{u}(p_-)\gamma^\nu i \int G(p)\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\rho D_{\rho\nu}(f) u(-p_+) \frac{d^4p}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \qquad (114.2)$$

あるいは，展開した形で

$$\gamma^\mu f(k^2) - \frac{1}{2m} g(k^2)\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int \frac{i\varphi^\mu(p)\, d^4p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]} \qquad (114.3)$$

となる．ここで

$$\varphi^\mu(p) = -e^2 \frac{\gamma^\nu(\hat{p}+m)\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\nu}{4\pi^3(p_- - p)^2} \qquad (114.4)$$

と置いた．簡単のために因子 $\overline{u}(p_-)\cdots u(p_+)$ は落としてある．以後つねに等式の両辺ともこれらに《はさまれて》いるものと考えることにする．

図形 (114.1) 上に引かれた水平の破線は，ユニタリー条件によって形状因子の虚部を計算するときに現われるはずの中間状態を示すようなやり方で図形を切断している．これは

p_-, p_+ とは異なる運動量をもつ電子－陽電子対の状態である．この切断は，もしも規則 (112.9) にしたがった計算を行なえば，積分 (114.2) のなかのどこで極性因子の置き換えを行なう必要があるかを示している ((114.3) ではこれらの因子は被積分関数のなかではっきりしている)．

(114.3) のなかの積分は (112.2) のなかのとまったく同じ形である．したがって，われわれは途中の段階を通り越してただちに (112.10) の形への変換の結果を書くことができる．

$$2\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{2}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t) = -\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int \varphi^\mu(p)\,do_{\boldsymbol{p}}. \qquad (114.5)$$

ここで $t=k^2$ である．積分はベクトル $\boldsymbol{p}$ の方向について行なわれる．関数 $\varphi^\mu(p)$ の定義 (114.4) のなかの 4－ベクトル $p'_-\equiv p$ および $p'_+\equiv k-p$ は (仮想的でなく) 現実の粒子の 4－運動量である．(114.5) は $\boldsymbol{k}=0$ であるような基準系に関するものである．これは生成された対 p_-, p_+ (したがってまた《中間の》対 p'_-, p'_+) の重心系である．この系では，したがって

$$k=(k_0, 0), \quad p_-=\left(\frac{k_0}{2},\ \boldsymbol{p}_-\right), \quad p_+=\left(\frac{k_0}{2},\ -\boldsymbol{p}_-\right), \quad p=\left(\frac{k_0}{2},\ \boldsymbol{p}\right)$$

である．また容易に

$$f^2=(p-p_-)^2=-2\boldsymbol{p}^2(1-\cos\theta)=-\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad (114.6)$$

であることを証明することができる．ここで θ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}_-$ とのあいだの角度である．いまは (114.4) を (114.5) に代入して，被積分式のなかで行列の式 $\gamma^\nu\cdots\gamma_\nu$ を公式 (22.6) を使って消去して

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu \operatorname{Im} f(t) - \frac{1}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \operatorname{Im} g(t)\\
&\quad = -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\int \frac{do_{\boldsymbol{p}}}{2\pi(1-\cos\theta)}\gamma^\nu(\hat{p}+m)\gamma^\mu(\hat{p}-\hat{k}+m)\gamma_\nu\\
&\quad = -\frac{e^2}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\int \frac{do_{\boldsymbol{f}}}{2\pi(1-\cos\theta)}[-2m^2\gamma^\mu+4m(P^\mu+2f^\mu)\\
&\qquad\qquad +2(\hat{p}_+-\hat{f})\gamma^\mu(\hat{p}_-+\hat{f})] \qquad (114.7)
\end{aligned}$$

を得る．ここで 4－ベクトル

$$f=p-p_-=(0,\boldsymbol{f}), \quad P=p_--p_+=(0, 2\boldsymbol{p}_-) \qquad (114.8)$$

が導入した．

積分すると，今度は，下にあげる三つの分子のなかのいずれかをもつ積分

$$(I, I^{\mu}, I^{\mu\nu}) = \int \frac{(1, f^{\mu}, f^{\mu} f^{\nu})}{1 - \cos\theta} \frac{do_{f}}{2\pi} \tag{114.9}$$

に帰してしまう．

積分 I は $\theta \to 0$ のとき対数的に発散する．これを

$$I = \int_{0}^{t-4m^2} \frac{d(\boldsymbol{f}^2)}{\boldsymbol{f}^2} = \int_{0}^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2}$$

のように書き直すと，発散が仮想的光子の小さい《質量》に対応するものであることがわかる．このようにして，これは《赤外》発散である．これの詳しい考察は §119 まで残しておこう．ここではただ，すべての物理的効果を正しく計算するとき，同様な発散が互いに打ち消しあって消えてしまう，という意味でこの発散は人為的であることを指摘しておこう．したがって，われわれは任意のやり方で積分を下限で《切断する》ことができる．そして先へいって実際の物理現象の計算にあたっては，切断した下限を 0 に近づけることができる．

ここでは相対論的不変なやり方で切断をするのが最も簡単である．このためには仮想光子に，小さいけれども有限な質量 λ ($\lambda \ll m$) をつける．すなわち (114.2) で光子伝播関数 $D(f^2)$ のなかで置き換え

$$f^2 \to f^2 - \lambda^2 \tag{114.10}$$

をする．その後

$$I = \int_{0}^{-(t-4m^2)} \frac{d(f^2)}{f^2 - \lambda^2} = \ln \frac{t - 4m^2}{\lambda^2} \tag{114.11}$$

となる．

積分 I^{μ} は，そのなかの f^{μ} が空間類似 4－ベクトルであり，4－ベクトル P^{μ} を使って表わされなければならない．すなわち，われわれの手もとにある二つの 4－ベクトルのなかで（任意の p_{+}，p_{-} のとき）P^{μ} だけが空間類似である．したがって $I^{\mu} = AP^{\mu}$ である．この等式に P_{μ} を掛け，粒子－反粒子対の重心系で積分 $P_{\mu} I^{\mu}$ を計算し（4－ベクトル f および p の成分は (114.8) からもってくる）

$$A = \frac{1}{2\boldsymbol{p}^2} \int_{-1}^{1} \frac{\boldsymbol{fp}\, d\cos\theta}{1 - \cos\theta} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} d\cos\theta = -1$$

を得る．したがって

$$I^{\mu} = -P^{\mu} \tag{114.12}$$

である.

同様な方法で積分

$$I^{\mu\nu}=\frac{1}{4}P^2\left(g^{\mu\nu}-\frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right)+\frac{1}{4}P^\mu P^\nu \tag{114.13}$$

も計算される（この式で係数を決めるためには，積分 I^μ_μ および $I^{\mu\nu}P_\mu P_\nu$ を計算すれば十分である）.

これから先の計算はつぎのように行なわれる．(114.11)～(114.13) を (114.7) に代入し，$\bar{u}(p_-)\cdots u(-p_+)$ に《はさまれた》一連の項の和が得られる．これらの各項のなかで（行列 γ^μ の交換則を使って）因子 $\hat{p}_+$ を右へ，$\hat{p}_-$ を左へ《引き寄せる》．その後では $\hat{p}_-\to m$，$\hat{p}_+\to -m$ のように置き換えることができる．なぜかというと

$$\bar{u}(p_-)\hat{p}_-=m\bar{u}(p_-),\quad \hat{p}_+u(-p_+)=-mu(-p_+)$$

であるからである．結果として得られた和

$$-4(p_+p_-)I\gamma^\mu+2mP^\mu-3P^2\gamma^\mu$$

のなかで P^μ は（はさまれたとき！）これと同等な式

$$P^\mu\longrightarrow 2m\gamma^\mu+\sigma^{\mu\nu}k_\nu$$

と置き換えることができる（(113.5) 参照）．最後に すべての量を不変量 $t=k^2$ $(2p_+p_-=t-2m^2,\ P^2=4m^2-t)$ で表わして，そのあとで等式 (114.7) の両辺をくらべて，形状因子の虚部に対する公式

$$\mathrm{Im}\,g(t)=\frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}}, \tag{114.14}$$

$$\mathrm{Im}\,f(t)=\frac{\alpha}{4\sqrt{t(t-4m^2)}}\left[-3t+8m^2+2(t-2m^2)\ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}\right] \tag{114.15}$$

を得る．$\mathrm{Im}\,f(t)$ のなかにだけ赤外発散がある.

関数 $f(t)$ および $g(t)$ は，公式 (113.11)，(113.12) を使って，その虚部から計算される．これらの式の積分は，§110 で $\mathcal{P}(t)$ の計算の際に行なわれた置き換えを使ってやるとつごうがよい．変数 ξ (110.11) を使って表わされた形状因子は，つぎの公式で定義される.

$$g(\xi)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\xi\ln\xi}{\xi^2-1}, \tag{114.16}$$

$$f(\xi)-1=\frac{\alpha}{2\pi}\left\{2\left(1+\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\ln\xi\right)\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3(1+\xi^2)+2\xi}{2(1-\xi^2)}\ln\xi\right.$$
$$\left.+\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\left[\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{2}\ln^2\xi-2F(\xi)+2\ln\xi\ln(1+\xi)\right]\right\}. \qquad (114.17)$$

ここで $F(\xi)$ は (127.19) で定義されるスペンス関数である.

非物理的領域 $(0<t/m^2<4)$ では $\xi=e^{i\varphi}$ と置く必要がある. 形状因子に対する式はこのときつぎの形に導くことができる.

$$f(\varphi)=\frac{\alpha}{\pi}\left\{\left(1-\frac{\varphi}{\tan\varphi}\right)\ln\frac{m}{\lambda}+\frac{3\cos\varphi+1}{2\sin\varphi}\varphi+\frac{2}{\tan\varphi}\int_0^{\varphi/2}\xi\tan\xi\,d\xi\right\}, \qquad (114.18)$$

$$g(\varphi)=\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}. \qquad (114.19)$$

最後に, 小さい $|t|$ に対する極限式を導こう.

$$f(t)-1=\frac{\alpha t}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}\right) \qquad (|t|\ll 4m^2),$$
$$g(t)=\frac{\alpha}{2\pi}. \qquad (114.20)$$

また大きい $|t|$ に対しては

$$f(t)-1=-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\frac{|t|}{m^2}+2\ln\frac{m}{\lambda}\ln\frac{|t|}{m^2}\right)+\begin{cases} i\,\dfrac{\alpha}{2}\ln\dfrac{t}{\lambda^2} & (t\gg 4m^2)\\ 0 & (-t\gg 4m^2)\end{cases} \qquad (114.21)$$

$$g(t)=-\frac{\alpha m^2}{\pi t}\ln\frac{|t|}{m^2}+\begin{cases} i\,\dfrac{\alpha m^2}{t} & (t\gg 4m^2)\\ 0 & (-t\gg 4m^2)\end{cases} \qquad (114.22)$$

である. 公式 (114.21) は (Re f にくらべて), いわゆる 2 重対数の精度で, すなわち大きい対数の 2 乗の精度で成立している[1].

§115. 電子の異常磁気モーメント

すでに §113 で示されたように, $g(0)$ の値は電子の磁気モーメントへの輻射補正を決定する. もしもこの値だけを計算することを目的とするならば, もちろん関数 $g(t)$ 全部を計算する必要はない. (114.14) と (113.12) とを使って

1) 一つの仮想的光子端と一つの現実の電子端と現実の光子端の場合の頂点演算子の計算については, А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий《Квантовая Электродинамика》(ア・イ・アヒーゼル, ヴェ・ベ・ベレステツキー《量子電気力学》) 第3版, 《ナウカ》 1969, §36, p. 505 参照.

$$g(0)=\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,g(t')}{t'}dt'=\frac{\alpha}{4\pi}\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{x-1}}=\frac{\alpha}{2\pi} \tag{115.1}$$

を得る．この補正を勘定に入れて，電子の磁気モーメントは

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right) \tag{115.2}$$

となる．この公式はシュヴィンガーにより最初に導かれた (1949).

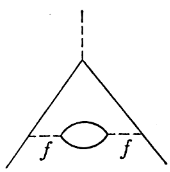
つぎの近似 ($\sim\alpha^2$) では，形状因子の輻射補正は一群の図形 (103.10, c〜i) によって表わされる．この近似では，$g(0)$ ただ一つの計算でさえも，非常に複雑な計算を必要とする．計算の詳細は原論文にまかせて，2次近似の補正の最終的な値だけを示そう[1].

$$g^{(2)}(0)=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{197}{144}+\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\zeta(3)\right)=-0.328\frac{\alpha^2}{\pi^2}. \tag{115.3}$$

したがって電子の磁気モーメントは

$$\mu=\frac{e\hbar}{2mc}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}-0.328\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right). \tag{115.4}$$

補正 $g^{(2)}(0)$ のなかの真空の偏りの寄与について特に詳しく述べよう．これは光子の自己エネルギー部分を含む図形



(115.5)

である．これと1次近似の図形 (114.1) との違いは，そこでの光子伝播関数 $D(f^2)=4\pi/f^2$ の代りに積

$$D(f^2)\frac{\mathcal{P}(f^2)}{4\pi}D(f^2)=\frac{4\pi}{f^2}\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2}$$

が入ることである．ここで $\mathcal{P}(f^2)$ は§110で計算された1次近似 ($\sim\alpha$) の偏りの演算子である．この変形とともに，部分的には前節で行なわれた計算を繰り返して，補正の《偏りの部分》に対して

1) C. Sommerfield, *Phys. Rev.* **107**, 328 (1957); *Ann. Phys.* **5**, 26 (1958) および A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957) 参照．ユニタリー性を使った方法による計算については М. В. Терентьев, ЖЭТФ, **43**, 619 (1962).

$$\mathrm{Im}\, g^{(2)}_{偏り}(t) = \frac{\alpha m^2}{\sqrt{t(t-4m^2)}} \int_{-1}^{1} \frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} \frac{1+3\cos\theta}{2} d\cos\theta \qquad (115.6)$$

を得る．ここで

$$f^2 = -\frac{t-4m^2}{2}(1-\cos\theta) \qquad (115.7)$$

である（(114.6) 参照）．この積分およびその後の積分

$$g^{(2)}_{偏り}(0) = \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} \mathrm{Im}\, g^{(2)}_{偏り}(t') \frac{dt'}{t'} \qquad (115.8)$$

の計算の結果は，つぎの値になる．

$$g^{(2)}_{偏り}(0) = \frac{\alpha^2}{\pi^2}\left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right) = 0.016\frac{\alpha^2}{\pi^2}. \qquad (115.9)$$

これは (115.3) の値全体の ～5％になる．

われわれはすでに (§111 の終りで) 輻射補正のなかの一定の寄与は他の粒子の真空の偏りに入れることができることを指摘した．電子の異常磁気モーメントへのミューオン真空の寄与は，まったく同じ公式 (115.6)～(115.8) にしたがって求める．ここで (変数 f^2 の定義のなかを含めて) m は前と同様に電子の質量 (m_e) である．しかし関数 $\mathcal{P}(f^2)$ の式中に現われるパラメータ m としてはミューオンの質量 (m_μ) をとらなければならない．$\mathcal{P}(f^2)/f^2$ は比 f^2/m_μ^2 だけの関数である．積分 (115.8) のなかでは，t（したがって f^2）の値が m_e^2 と同程度である領域が重要である．したがって比 $f^2/m_\mu^2 \sim (m_e/m_\mu)^2 \ll 1$ である．積分値の見積りには，極限の公式 (110.14) を利用することができる．これによれば

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2} = -\frac{\alpha}{15\pi}\frac{f^2}{m_\mu^2}$$

である．これから，真空のミューオンによる偏りの $g^{(2)}(0)$ に対する寄与は，付加的な小因子 $(m_e/m_\mu)^2$ になることがわかる．

しかしながら，ミューオンの磁気モーメントに適用するときは逆の立場になる．(115.3) には粒子の質量が含まれないので，この $g^{(2)}(0)$ の値はミューオンに関するものである．そして，それにはミューオン真空の偏りの寄与は勘定に入れてある．しかし，他の粒子，すなわち電子の真空の偏りからの寄与は，この場合にはかなり大きいことがわかる．それは公式 (115.6)～(115.8) にしたがって計算される．ここで今度は $m \to m_\mu$ の置き換えをし，$\mathcal{P}(t)$ としては電子の偏りの演算子を代入する必要がある．前の場合とは反対に，今度は $f^2/m_e^2 \sim (m_\mu/m_e)^2 \gg 1$ の領域が重要になり，$\mathcal{P}(f^2)$ としては極限の式 (110.15)

をとらなければならない．

$$\frac{\mathcal{P}(f^2)}{f^2}=\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|f^2|}{m_e^2}.$$

積分の計算の結果はつぎの値になる．

$$[g^{(2)}(0)]_{\text{電子による偏り}}=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left(\frac{1}{3}\ln\frac{m_\mu}{m_e}-\frac{25}{36}\right)=1.09\frac{\alpha^2}{\pi^2} \tag{115.10}$$

(H. Suura, E. H. Wichman, 1957; A. Peterman, 1957).

(115.3) と一緒にして，ミューオンの磁気モーメントに対して

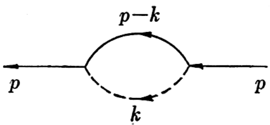
$$\mu_{\text{ミューオン}}=\frac{e\hbar}{2m_\mu c}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}+0.76\frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \tag{115.11}$$

を得る．ここではミューオン真空の偏りへの寄与 (115.9) は $g^{(2)}(0)$ 全体の値の $\sim 2\%$ になることに注意しよう．パイオン真空の偏りも（質量が近いために）この大きさを与えるはずである．しかしこれは一般には正確に計算することはできない．この理由から，ミューオンの磁気モーメントに対する $\sim\alpha^3$ の補正の計算はすでに意味をもたない[1]．

§116. 質量演算子の計算

質量演算子の計算の例として，ファインマン積分の直接の正則化の方法を示そう．

最初の 0 にならない近似では，質量演算子は図形



(116.1)

の環で表わされる．これは積分

$$-i\overline{\mathcal{M}}(p)=(-ie)^2\int\gamma^\mu G(p-k)\gamma^\nu D_{\mu\nu}(k)\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

に対応する．伝播関数を代入し，公式 (22.6) を使って因子 $\gamma^\mu\cdots\gamma_\mu$ を縮約することによって

$$\overline{\mathcal{M}}(p)=-\frac{8\pi i}{(2\pi)^4}e^2\int\frac{2m-\hat{p}+\hat{k}}{[(p-k)^2-m^2](k^2-\lambda^2)}d^4k \tag{116.2}$$

1) もちろん，ミューオンの磁気モーメントに対する補正の計算が許されるのは，現存の量子電気力学がミューオンに完全に適用できることを前提としており，これは明らかなことではない．

を得る（記号 $\mathcal{M}$ の上の横線でもって正則化されていない積分値を意味するものとする）。光子伝播関数には（§114 と同様に）赤外発散を消去する目的で，《光子の質量》λ が導入されている．

公式（127.4）のなかで a_1 および a_2 を（116.2）の分母の二つの因子と考えて，これを使って変形する．分母の項を簡単にまとめたのちに新しい積分を得る．

$$\overline{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4}e^2\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{2m-\hat{p}+\hat{k}}{[(k-px)^2-a^2]^2}. \tag{116.3}$$

ここで

$$a^2 = m^2x^2-(p^2-m^2)x(1-x)+\lambda^2(1-x). \tag{116.4}$$

変数の置き換え $k\to k+px$ を行なうと，積分（116.3）は，その分母が平方 k^2 だけに依存する形になる．しかしながらこのとき，(127.17)，(127.18) にしたがって積分には付加的定数

$$\overline{\mathcal{M}}(p) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4}e^2\left\{\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{2m-\hat{p}(1-x)}{(k^2-a^2)^2}-\frac{i\pi^2}{4}\hat{p}\right\} \tag{116.5}$$

が付け加えられる（分子のなかの $\hat{k}$ を含む項は，4－ベクトル k の方向についての積分で 0 になるので，今は落としてある．(127.8) 参照）．

この積分の正則化は結局，(107.20) の形の式へ導く計算になる．特に (107.20) は，もしも p が現実の電子の 4－運動量であるならば，波動関数 $u(p)$ に掛けると 0 になる点が違っている．$u(p)$ をあらわな形で導入しないでも，この条件を定式化することができる．それは置き換え

$$\hat{p}\to m,\quad p^2\to m^2 \tag{116.6}$$

の際に $\mathcal{M}(p)$ が 0 になると要求することである．積分の形（116.5）は，4－ベクトル p がそのなかにただ（kp の形の項がなくて）$\hat{p}$ および p^2 の形でのみ含まれているので便利である．

(116.5) から，(116.6) の置き換えをした式を引き去って次式を得る．

$$\frac{-8\pi i}{(2\pi)^4}\left\{\int d^4k\int_0^1 dx\cdot[2m-\hat{p}(1-x)]\left[\frac{1}{(k^2-a^2)^2}-\frac{1}{(k^2-a_0^2)^2}\right]\right.$$
$$\left.-\int d^4k\int_0^1 dx\,\frac{1-x}{(k^2-a_0^2)^2}(\hat{p}-m)-\frac{i\pi^2}{4}(\hat{p}-m)\right\}. \tag{116.7}$$

ここで

$$a_0^2 = m^2x^2+\lambda^2(1-x)$$

である．

しかしながら，最終的な正則化にはさらに1回の差し引きを行なう必要がある．(107.20) にしたがって，置き換え (116.6) の際に $\mathcal{M}(p)$ 全体としてだけでなく，その因子 $\hat{p}-m$ を含まないものも0になる．それに対応する差し引きによって，(116.7) のなかの波括弧のなかの第2項および第3項は全部すてられる[1]．第一の積分は，あらかじめ公式 (127.5) を使って補助的積分を導入して変形しておく．そこで $n=2$ と置き，a および b をそれぞれ k^2-a^2 および $k^2-a_0^2$ と考える．このとき積分は

$$(\hat{p}-m)\frac{16\pi i}{(2\pi)^4}e^2\int d^4k\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{(\hat{p}+m)[2m-\hat{p}(1-x)]x(1-x)}{[k^2-a_0^2+(p^2-m^2)x(1-x)z]^3}$$

の形になる（ここでまた恒等式 $p^2-m^2=(\hat{p}-m)(\hat{p}+m)$ が使われた)．つぎに d^4k についての積分をする．$p^2-m^2<0$ であると仮定し，(127.14) を使って

$$(\hat{p}-m)\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{(\hat{p}+m)[2m-\hat{p}(1-x)]x(1-x)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)+(m^2-p^2)x(1-x)z}$$

を得る．今度は一時的に因子 $(\hat{p}-m)$ を落として，置き換え (116.6) を行なった積分を差し引くことが残っている．簡単な演算ののち

$$\mathcal{M}(p)=(\hat{p}-m)^2\frac{e^2}{2\pi}\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{m(1-x^2)-(\hat{p}+m)(1-x)^2\left[1-\dfrac{2x(1+x)z}{x^2+(\lambda/m)^2}\right]}{m^2x+(m^2-p^2)(1-x)z}\tag{116.8}$$

を得る（共通分母のなかで λ^2 の項はここでは発散に導かないので落とした．その他の場所では，赤外発散が $x\to 0$ のときの発散に対応するので，$\lambda^2(1-x)$ を λ^2 に置き換えた)．

(116.8) のなかでの積分（初めは dz について，その後 dx について）は非常に長いが初歩的であり，つぎのような最終的な結果に到達する．

$$\mathcal{M}(p)=\frac{\alpha}{2\pi m}(\hat{p}-m)^2\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1-\frac{2-3\rho}{1-\rho}\ln\rho\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\hat{p}+m}{m\rho}\left[\frac{1}{2(1-\rho)}\left(2-\rho+\frac{\rho^2+4\rho-4}{1-\rho}\ln\rho\right)+1+2\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\}.\tag{116.9}$$

---

1) これによりわれわれは《一歩一歩のくりこみ》の操作（38頁参照）に，くりこみ定数 Z_1 (§107) に対する補正を入れることになる．それに対応する積分は対数的に発散する．《切断のパラメータ》$\Lambda^2\gg m^2,\ p^2$ を導入して d^4k による積分領域を条件 $k^2\leqslant\Lambda^2$ で制限すると，これらの補正をあらわな形で計算することができる．計算の結果はつぎのような結果になる．

$$Z_1=1+Z_1^{(1)},\quad Z_1^{(1)}=-\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2}+\ln\frac{\lambda^2}{m^2}+\frac{9}{4}\right].\tag{116.7a}$$

ここで

$$\rho = \frac{m^2 - p^2}{m^2}$$

と置いた (R. Karplus, N. M. Kroll, 1950). $\rho > 0$ で $\rho \gg \lambda/m$ の仮定のもとに積分は計算される. (116.9) の $\rho < 0$ の領域での解析接続の際の極を回る規則に対応して, 対数の位相は置き換え $m \to m - i0$ によって決定される. このとき $\rho \to \rho - i0$ である. したがって $\rho < 0$ のときの $\ln \rho$ は

$$\ln \rho = \ln |\rho| - i\pi, \quad \rho < 0 \tag{116.10}$$

と考えなければならない.

$p^2 \gg m^2$ のときの質量演算子の振舞いを考察しよう. このとき $-\rho \approx p^2/m^2 \gg 1$ で, 対数的精度で

$$\mathcal{M}(p) = -[\mathcal{G}^{-1}(p) - G^{-1}(p)] \approx \frac{\alpha}{4\pi} \hat{p} \ln \frac{p^2}{m^2} \tag{116.11}$$

である. 光子伝播関数の場合と同様に (偏りの演算子に対する公式 (110.15), (110.16) 参照), G^{-1} に対する補正はエネルギーが非常に大きくはないとき, すなわち

$$\frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{p^2}{m^2} \ll 1$$

のときにのみ小さいことがわかる.

しかしながら, この場合対数的な増大はある意味で人為的なものである. これは必要なゲージの選択, すなわち光子伝播関数中の関数 $D^{(l)}$ の選択によって消去することができる (Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, 1954).

このためには

$$D^{(l)} = 0 \tag{116.12}$$

と置く必要がある. しかしながら, 一方では公式 (116.9) はゲージ

$$D^{(l)} = D \tag{116.13}$$

で得られている. ゲージ (116.12) のこの性質は, $p^2 \gg m^2$ のときの理論の特性の研究に対しては特に便利である. これは先へいって §128 で使われるはずである.

上の主張を証明するために, $\sim e^2$ の項だけに興味をもつならば (e^2 が (102.14) の指数部にあるために), ゲージ (116.13) からゲージ (116.12) への変換は無限小と考えてよいことを思い起こそう. それに対応して, 公式 (102.16) を直接使うことができる. そこでは

$$\delta d^{(l)}(q) = -\frac{D}{q^2} = -\frac{4\pi}{(q^2)^2}$$

と置き，また必要な精度で，被積分式中の関数 $\mathcal{G}$ を G で置き換える．d^4q についての積分のなかでは $q \gg p$ の領域が重要である．このとき被積分式中の $G(p-q)$ は $G(p)$ よりもずっと小さく，それを無視することができる．このとき

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = -G^{-2}(p)\delta\mathcal{G}(p) = -ie^2G^{-1}(p)\int\delta d^{(l)}(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

である．最後に，変換 (127.11)，(127.12) を適用して

$$\delta\mathcal{G}^{-1}(p) = -\frac{e^2}{4\pi}G^{-1}(p)\int\frac{d(-q^2)}{-q^2} \approx -\frac{e^2}{4\pi}\hat{p}\ln\frac{\Lambda^2}{p^2}.$$

ここで Λ は補助的な上限で，その発散はくりこみによって消去される．このくりこみは $p^2 \approx m^2$ と置いた同じ式を差し引くことであり，したがって最終的には

$$\delta\mathcal{G}^{-1} = \frac{e^2}{4\pi}\hat{p}\ln\frac{p^2}{m^2}$$

となる．この式はまた (116.11) の差 $\mathcal{G}^{-1}-G^{-1}$ を簡略化したものである．

最後に，積分 (116.2) の正則化の際の有限の《光子の質量》λ の導入を余儀なくされる原因の問題を詳しく論ずることにしよう．これは $p^2 \to m^2$ のときの積分の振舞いと密接に結びついている．

まず第一に，$\lambda = 0$ の積分自体は $p^2 = m^2$ のとき有限であることを指摘しよう（この段階で重要ではない大きい k に対する発散を消去するためには，この際積分は k－空間の大きいけれども有限の領域で行なうと仮定する）．λ を導入する必要性は，くりこまれた積分の差し引きのとき起こる．そうしないと $p^2 = m^2$ のところで発散するはずである．そこで，正則化されていない質量演算子が $p^2 \to m^2$ のときどう振舞うかを明らかにしよう．この振舞いが本質的にゲージの選択に依存するから，一般的な任意のゲージの場合を考察しよう（しかしながら，積分 (116.2) はすでに，特定の選択 (116.13) に対して書かれている）．

ふたたび変換 (102.16) が使われる．$\delta d^{(l)}$ を

$$\delta d^{(l)}(q) = \frac{\delta D^{(l)}}{q^2} = \frac{4\pi}{(q^2)^2}\delta a(q^2) \qquad (116.14)$$

の形に書き，δa は関数 $a(q^2)$ の変化で，$q^2 \sim m^2$ の区間でのみいちじるしく変化し，$q^2 \approx m^2$ で有限である．(102.16) の右辺の被積分式中の差 $\mathcal{G}(p)-\mathcal{G}(p-q)$ のなかで，

q が小さいとき二つの項の値が接近しており，積分は収束する．q が小さいとき

$$\mathcal{G}(p-q) \sim \frac{1}{p^2-m^2-2pq}$$

であることに注意して，$q \gg (p^2-m^2)/m$ のときには $\mathcal{G}(p-q)$ は $\mathcal{G}(p)$ にくらべて落とすことができる．積分

$$\delta\mathcal{G}(p) = ie^2\mathcal{G}(p)\int \delta d^{(l)}(q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} = -\frac{e^2}{4\pi}\mathcal{G}(p)\int \delta a(q^2)\frac{d(-q^2)}{-q^2}$$

は領域

$$\frac{(p^2-m^2)^2}{m^2} \ll q^2 \ll m^2$$

で対数的に発散する．したがって対数的精度で

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = -\frac{e^2}{2\pi}\delta a(m^2)\ln\frac{m^2}{p^2-m^2}.$$

この等式は積分することができる．$\alpha \equiv e^2 \to 0$ のときに正確な伝播関数 $\mathcal{G}$ は自由粒子の伝播関数 G と一致しなければならないことを思い起こし

$$\mathcal{G}(p) = \frac{1}{\hat{p}-m}\left(\frac{m^2}{p^2-m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(C-a_0)} \qquad (116.15)$$

を得る．ここで $a_0 = a(m^2)$ で，C はある定数である．この定数を決めるために (116.15) から α についての 1 次近似で得た式

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p}-m)\left[1+\frac{\alpha}{2\pi}(C-a_0)\ln\rho\right] \qquad (116.16)$$

を，積分 (116.2) から $\lambda = 0$ [1] として得られる類似の式

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = (\hat{p}-m)\left[1+\frac{\alpha}{\pi}\ln\rho\right] \qquad (116.17)$$

とくらべる．定義 (116.14) にしたがえば，関数 $a(q^2)$ は比 $D^{(l)}/D$ と一致する．したがって，(116.17) に使ったゲージは，$a = a_0 = 1$ に対応する．a_0 がこの値のときに(116.16) と (116.17) が一致することを要求すると，$C = 3$ を得る．

このようにして，最終的に，くりこみをしない電子伝播関数のつぎのような $p^2 \to m^2$ の

---

1) (116.17) を得るために，新たな計算をする必要はない．(116.9) の $\sim \ln\rho$ の項はまた $\rho \gg \lambda$ の前提で得られていて，$\lambda \to 0$ の移行は許される．$\sim \ln(\lambda/m)$ の項はくりこみをしない積分の差し引きから出てきており，もとの積分 (116.2) には存在しない．容易にわかるように，この差し引きは $\sim \ln\rho$ の項には関係しない．

極限式（**赤外漸近式**）を得る（A. A. Абрикосов, 1955）[1)].

$$\mathcal{G}(p) = \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\left(\frac{m^2}{p^2-m^2}\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}(3-a_0)}. \qquad (116.18)$$

くりこまれた伝播関数は $p^2=m^2$ で単純な極をもつ必要がある．(116.18) はゲージ

$$D^{(l)} = 3D \qquad (116.19)$$

（したがって $a_0=3$）でのみこの条件を満足することがわかる．この場合ファインマン積分の（その発散を上限で消去するための）正則化は有限の《光子の質量》の導入を要求することはない．他のゲージで，光子の質量が 0 であると $p^2=m^2$ のときに単なる極の代りに分岐点を生じ，この《欠点》を除くには有限のパラメータ λ の導入が要求される．

§117. 質量が 0 でない軟光子の放出

§114 で電子形状因子の計算の際，われわれは仮想的光子の振動数が小さいときの積分の発散に遭遇した．この発散は §95 ですでに考察した赤外破局と密接な関係がある．そこでは，荷電粒子が参加する任意の過程（そのなかには (114.1) の形の図形で記述される，外場内の電子散乱も含まれる）の断面積はそれだけでは意味をもたず，同時に任意個の軟光子放出を勘定に入れたときだけ意味があることが示された．先へいって（§119）詳しく説明されるように，軟光子の輻射を考慮した全断面積では，すべての発散が落とされる．もちろんこのとき，正しい結果を得るためには前もって，すべての加え合わされる断面積のなかの発散積分の《切断》を同一の方法で行なわなければならない．

§114 でこの切断は，仮想的光子の人為的な有限の質量 λ の導入によって実現された．したがって，われわれは今は §95で得られた公式を，質量が 0 でない軟《光子》の輻射を記述できるように変形する必要がある．

形式的な観点から，このような光子はスピン 1 をもつ《ベクトル》粒子で，その自由場については §14 で考察されている．それらは 4－ベクトル ϕ_μ で記述され，第二量子化の表わし方ではつぎの形になる．

$$\phi_\mu = \sqrt{4\pi}\sum_{k\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(c_{k\alpha}e_\mu^{(\alpha)}e^{-ikx} + c_{k\alpha}^{+}e_\mu^{(\alpha)*}e^{ikx}\right) \qquad (\alpha=1,2,3) \qquad (117.1)$$

1) この式が正しいのは，ただつぎの不等式 $\alpha \ll 1$, $|\ln\rho| \gg 1$ の場合だけである．しかしながら一方では，摂動論は $\alpha/2\pi\cdot|\ln\rho| \ll 1$ もまた要求するはずである．

また，差 p^2-m^2 の符号はここでは重要でなく，したがって式 (116.18) の虚部はすべて等しく，その精度の限界外にあるであろう．

(ここでわれわれは (14.14) とくらべて記号をまったく変え，光子の場合と対応するようにした).

《光子》(117.1) と電子との相互作用を，本当の光子に対するものとまったく同じ形のラグランジアンで記述する必要がある．すなわち（ポテンシャル A_μ を ϕ_μ に変えて)

$$-e\,\mathrm{j}^\mu \phi_\mu. \tag{117.2}$$

このとき有限の質量をもつ光子放出の過程の振幅は普通の図形手法で与えられる．違う点はただ

$$k^2 = \lambda^2 \tag{117.3}$$

であることと，放出された光子の偏りについての和が，普通の光子の二つの代りに，三つの独立な偏り（二つの横成分と一つの縦成分）について行なう必要があることとである．

偏りのないベクトル粒子の密度行列は，条件

$$ke = 0, \qquad ee^* = -1 \tag{117.4}$$

を使って容易に得られる ((14.12)，(14.13) 参照)．求める行列を

$$\rho_{\mu\nu} = \overline{e_\mu e_\nu^*} = ag_{\mu\nu} + bk_\mu k_\nu$$

の形に書いて，a および b を条件 (117.4) から決めて

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right) \tag{117.5}$$

を得る．

ベクトル粒子の伝播関数の分子は同じ構造をもっている．

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right).$$

しかしながらゲージ不変性のために，現実の散乱過程の振幅は光子伝播関数の縦波の部分には依存しない．その性質は横波部分の具体的な形とも関係がない．したがって括弧内の第2項は実際は落ちて，普通の光子に対するのとまったく同じ形の式が残る．

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2-\lambda^2}g_{\mu\nu}$$

(われわれはこれを §§114，116で使った)．

いまは (§95で説明された) 軟光子の輻射に目を向けよう．

§95で行なわれた式 (95.5)，(95.6) の導き方は，すこし変更すればいま考察されている場合にもそのまま使われる．その違いは，電子伝播関数の分母の平方 $(p \pm k)^2$ を展開するときに，$k^2 = \lambda^2$ の項がつけ加えられることである．結果として (95.6) の代りに

$$d\sigma = d\sigma_{弾}\cdot e^2\left|\frac{p'e}{p'k+\lambda^2/2}-\frac{pe}{pk-\lambda^2/2}\right|^2\frac{d^3k}{4\pi^2\omega}$$

を得る．ここで $d\sigma_{弾}$ は軟光子の輻射を伴わない同じ過程（これを《弾性》過程[1]と呼ぶことにする）の断面積である．先へいって，d^3k についての積分の際に $|\boldsymbol{k}|\sim\lambda$ の値が重要である．このとき $p'k\sim pk\gg\lambda^2$ である．したがって分母で λ^2 の項は無視することができる．光子の偏りについての和は (117.5) を使って（平均し，それにつづいて3倍する）行なうことができる．上の省略を行なったあとでは，(117.5) の第2項は断面積には何の寄与もしない．そして

$$d\sigma = -\,d\sigma_{弾}\cdot e^2\left(\frac{p'}{(p'k)}-\frac{p}{(pk)}\right)^2\frac{d^3k}{4\pi^2\omega} \tag{117.6}$$

が残る[2]．このようにして，われわれは公式 (95.7) に戻ってくる．しかしながら，ここでは ω を

$$\omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2} \tag{117.7}$$

と理解する必要がある．

公式 (117.6) はまったく一般的な性質をもっている．それは弾性散乱にも非弾性散乱にも，さらに粒子の種類の変化するとき（このような場合にわれわれは §147 で出会うことになる）にも適用できる．d^3k についての前の積分の結果は，4－ベクトル p および p' に，言いかえれば，散乱の基本的過程の特性に依存する．

弾性散乱の場合を考えよう．そこでは

$$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|,\qquad \varepsilon=\varepsilon'$$

であり

$$\lambda\ll\omega_{\max}\ll m$$

であるような，$\omega_{\max}$ より小さい振動数をもつ光子放出の全確率を求める．

まず第一に非相対論的極限で d^3k についての積分を行なう．$|\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|\ll m$ のときは

$$\left(\frac{p'}{(p'k)}-\frac{p}{(pk)}\right)^2\approx\frac{(\boldsymbol{qk})^2}{m^2\omega^4}-\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2\omega^2}$$

になる $(\boldsymbol{q}=\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})$．この式を $\boldsymbol{k}$ の方向について積分すると

---

1) §95 の断面積 $d\sigma_{弾}$ は $d\sigma_0$ と置く．

2) 一見 (117.5) 中の第2項の分母に λ^2 があるので，平均するまでは λ^2 を無視することを許すことに疑問が生じてもよさそうである．しかしながら，この項は平均で $\sim\lambda^4\cdot1/\lambda^2$ の寄与を与えることが容易に確かめられ，これは無視できる．

$$\frac{4\pi \boldsymbol{q}^2}{m^2\omega^2}\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{3\omega^2}-1\right)$$

になる．このあと (117.6) から

$$d\sigma = d\sigma_{弾}\cdot\frac{e^2\boldsymbol{q}^2}{\pi m^2}\int_0^{\omega=\omega_{\max}}\left[1-\frac{\boldsymbol{k}^2}{3(\boldsymbol{k}^2+\lambda^2)}\right]\frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{(\boldsymbol{k}^2+\lambda^2)^{3/2}}$$

あるいは $\omega_{\max}/\lambda \gg 1$ の仮定のもとに積分を行なって

$$d\sigma = d\sigma_{弾}\cdot\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}-\frac{5}{6}\right) \qquad (\boldsymbol{q}^2 \ll m^2) \qquad (117.9)$$

を得る．

一般の相対論的場合には，積分の計算に公式 (127.4) を利用する．これを使って，角度についての積分に対して

$$I=\int\frac{do_{\boldsymbol{k}}}{(pk)(p'k)}=\int_0^1 dx\int\frac{do_{\boldsymbol{k}}}{[(pk)x+(p'k)(1-x)]^2}$$

あるいは，$p=(\varepsilon,\boldsymbol{p})$，$p'=(\varepsilon,\boldsymbol{p}')$ とのスカラー積を展開して

$$I=\int_0^1 dx\int\frac{do_{\boldsymbol{k}}}{\{\varepsilon\omega-\boldsymbol{k}[\boldsymbol{p}x+\boldsymbol{p}'(1-x)]\}^2}$$

となる．いまは内側の積分は，ベクトル $\boldsymbol{p}x+\boldsymbol{p}'(1-x)$ を極軸とする球座標で容易に計算される．そうすると

$$I=\int_0^1\frac{4\pi\, dx}{(\varepsilon\omega)^2-[\boldsymbol{p}x+\boldsymbol{p}'(1-x)]^2\boldsymbol{k}^2}=\int_0^1\frac{4\pi\, dx}{[m^2+\boldsymbol{q}^2x(1-x)]\boldsymbol{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}$$

となる．これから $\boldsymbol{q}=0$ として，(分母に $(pk)^2$ および $(p'k)^2$ をもつ) 他の二つの積分が求められる．また

$$pp'=\varepsilon^2-\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'=m^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^2$$

を思い起こして

$$d\sigma=\frac{2e^2}{\pi}\int_0^1 dx\int_0^{\omega_{\max}}\frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}\left\{\frac{m^2+\boldsymbol{q}^2/2}{[m^2+\boldsymbol{q}^2x(1-x)]\boldsymbol{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}-\frac{m^2}{m^2\boldsymbol{k}^2+\varepsilon^2\lambda^2}\right\} \qquad (117.10)$$

を得る．

$d|\boldsymbol{k}|$ についての積分は，つぎの形の積分の計算になる．

$$\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\boldsymbol{k}^2 d|\boldsymbol{k}|}{(a\boldsymbol{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\boldsymbol{k}|}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}-\frac{\lambda^2}{a}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d|\boldsymbol{k}|}{(a\boldsymbol{k}^2+\lambda^2)\sqrt{\boldsymbol{k}^2+\lambda^2}}$$

$$\approx\frac{1}{a}\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}-\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{dz}{(az^2+1)\sqrt{z^2+1}}.$$

2番目の積分では $|\boldsymbol{k}|\to\lambda z$ に置き換えられ，上限 $(\omega_{\max}/\lambda)$ が ∞ に変えられる．これは積分が収束するので許される．

(117.10) でこのあとに出てくる dx についての積分は，完全に初等関数を使って表わすことはできない．結果はつぎのように表わされる．

$$d\sigma=\alpha\left[K\left(\frac{|\boldsymbol{q}|}{2m}\right)\ln\frac{2\omega_{\max}}{\lambda}+K_1\right]d\sigma_{弾} \tag{117.11}$$

ここで

$$K(\xi)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2\xi^2+1}{\xi\sqrt{\xi^2+1}}\ln\left(\xi+\sqrt{\xi^2+1}\right)-1\right], \tag{117.12}$$

$$K_1=\frac{2\varepsilon}{\pi|\boldsymbol{p}|}\ln\frac{\varepsilon+|\boldsymbol{p}|}{m}-\frac{2m^2+\boldsymbol{q}^2}{\pi\varepsilon^2}\int_0^1\frac{dx}{a\sqrt{1-a}}\ln\frac{1+\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}}, \tag{117.13}$$

$$a=\frac{1}{\varepsilon^2}[m^2+\boldsymbol{q}^2x(1-x)]$$

である[1)]．

超相対論的場合の断面積に対する漸近式を求めよう．このとき，$\varepsilon\gg m$ だけでなく $|\boldsymbol{q}|\gg m$，すなわち散乱角は非常に小さくはないと仮定される．これらの条件のもとで，積分 (117.13) では $a\ll 1$ であるような x の値の領域が重要である．適当な省略ののち

$$K_1\approx\frac{\boldsymbol{q}^2}{2\pi\varepsilon^2}\int_0^1\frac{\ln a}{a}dx\approx\frac{1}{2\pi}\int\frac{\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{\varepsilon^2}+\ln x+\ln(1-x)}{x(1-x)}dx$$

となる．積分は $a\sim 1$ のところ，すなわち下は $x\sim m^2/\boldsymbol{q}^2$ 上は $1-x\sim m^2/\boldsymbol{q}^2$ のところで切断しなければならない．このとき

1) 関数 $K(\xi)$ はすでに §95 の問題で出会っている．これは別に不思議ではない，なぜかというと対数的精度で (117.11) は，質量が 0 の光子の放出の断面積 (95.8) を $d\omega$ について λ から $\omega_{\max}$ まで積分して求めることができるからである．

もしも ξ の代りに $\xi=\sinh(\theta/2)$ にしたがって，変数 θ を導入すると

$$K(\theta)=\frac{2}{\pi}(\theta\coth\theta-1) \tag{117.12a}$$

となる．

$$K_1 \approx \frac{1}{2\pi}\left[2\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2} - \ln^2\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\ln^2\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2} - 4\ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\right]$$

である．この公式は対数の平方の精度，いわゆる**2重対数精度**で成立する．この精度では (117.11) の第1項のなかで

$$K(\xi) \approx \frac{4}{\pi}\ln\xi \qquad (\xi \gg 1)$$

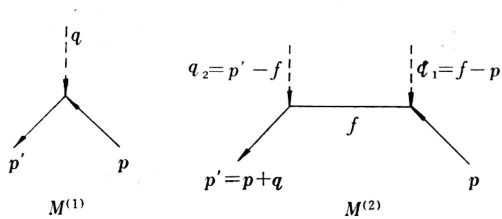
と置けば十分である．最終的に

$$d\sigma = \frac{2\alpha}{\pi}\left[\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\ln\frac{\omega_{\max}}{\lambda} - \ln\frac{\varepsilon}{m}\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2} + \frac{1}{4}\ln^2\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\right]d\sigma_{弾} \qquad (\boldsymbol{q}^2 \gg m^2) \tag{117.14}$$

となる．

§118. 2次のボルン近似の場合の外場内の電子散乱

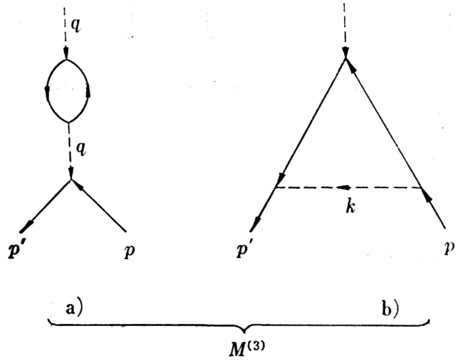
電子散乱の外場についての初めの二つの近似は，つぎの図形で表わされる．



(118.1)

これらの第1番目のものは §81 で考察された $M^{(1)} \sim Ze^2$ に対応する．2番目の近似の振幅は $M^{(2)} \sim (Ze^2)^2$ である．

この次数の大きさの項が輻射補正から生じることは容易にわかる．3次の摂動論では散乱振幅に対する輻射補正は図形



(118.2)

で記述される．このとき $M^{(3)}\sim Ze^2\cdot e^2$ あるいはもしも $Z\sim 1$ ならば $M^{(3)}\sim M^{(2)}$ である．

(65.26) にしたがって，散乱断面積は

$$d\sigma=|M_{fi}^{(1)}+M_{fi}^{(2)}+M_{fi}^{(3)}|^2\frac{do'}{16\pi^2} \tag{118.3}$$

である．ここに出てくる振幅の平方のなかで，われわれは $|M_{fi}^{(1)}|^2$ とともに $M_{fi}^{(1)}$ と $M_{fi}^{(2)}$ とのあいだ，および $M_{fi}^{(1)}$ と $M_{fi}^{(3)}$ とのあいだの干渉項もまた残すのが正しい．このようにして，$\sim e^6$ の項までの精度で，和

$$d\sigma=d\sigma^{(1)}+d\sigma^{(2)}+d\sigma_{輻} \tag{118.4}$$

で表わされる．ここで $d\sigma^{(1)}$ は1次のボルン近似の断面積である (§81)．これに対する補正は

$$d\sigma^{(2)}=2\,\mathrm{Re}\,M_{fi}^{(1)}M_{fi}^{(2)*}\frac{do'}{16\pi^2},\quad d\sigma_{輻}=2\,\mathrm{Re}\,M_{fi}^{(1)}M_{fi}^{(3)*}\frac{do'}{16\pi^2} \tag{118.5}$$

である．

$$M_{fi}^{(1)}=|e|(\overline{u}'\gamma^0u)\Phi(\boldsymbol{q}) \tag{118.6}$$

であることを思い起こそう (§81)． ここで $\Phi(\boldsymbol{q})$ は定外場のスカラー・ポテンシャル ($\Phi\equiv A_0^{(e)}$) のフーリエ成分であり，電子の電荷が $e=-|e|$ であることを勘定に入れてある．

二つの式 (118.5) は，明らかに独立に計算することができる．1番目はこの節で，2番目はつぎの節で考察される．

図形(118.1)にしたがってつくられた，2次近似の振幅は，つぎの積分で与えられる[1]．

$$M_{fi}^{(2)}=-e^2\int\left\{\overline{u}(p')\gamma^0\frac{\hat{f}+m}{f^2-m^2+i0}\gamma^0u(p)\right\}\Phi(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{f})\Phi(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{p})\frac{d^3f}{(2\pi)^3}. \quad (118.7)$$

定外場の《4－運動量》$q_1=f-p$ および $q_2=p'-f$ は時間成分をもたない．ゆえに

$$f_0=\varepsilon=\varepsilon' \quad (118.8)$$

である．ここで ε および ε' は電子の始めおよび終りのエネルギーで，弾性散乱のときは互いに一致する．

動かない電荷 $Z|e|$ の純クーロン場では

$$\Phi(\boldsymbol{q})=\frac{4\pi Z|e|}{\boldsymbol{q}^2}$$

である．このようなポテンシャルに対して，積分(118.7)は対数的に発散する($\boldsymbol{f}\approx\boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{p}'$ のとき)．この発散はクーロン場に対して特有のもので，その遠距離での減少がゆるやかであることと関係がある．非相対論的な場合を例とすると，この原因を最も簡単に説明することができる．III(133.8)にしたがって，クーロン場内の電子の波動関数の漸近式のなかの球面波 $e^{i|\boldsymbol{p}|r}/r$ は

$$f(\theta)\exp\left(-i\frac{Z\alpha m}{|\boldsymbol{p}|}\ln|\boldsymbol{p}|r\right)$$

の形になる．この係数は場による電子の散乱振幅であり，この位相が($r\to\infty$ のとき)発散項を含むことがわかる．散乱振幅の $Z\alpha$ についての冪展開をすると，この項は第2項から始って，展開のすべての項(なぜかというと関数 $f(\theta)$ 自体が $Z\alpha$ に比例しているからである)の発散へと導いている．もちろん，相対論的場合の事情も似たようなものである．

この考察は同時に，散乱断面積の計算の際は振幅の位相は重要でないので，発散項は落とす必要があることも示している．計算の最も簡単な修正法は，はじめに遮蔽されたクーロン場のなかでの散乱を考察することである．すなわち，小さい遮蔽定数 $\delta(\delta\ll|\boldsymbol{p}|)$ を

1) §78で定式化された図形手法の規則8は，(時間について)一定の外場の場合には，いくらか精密にする必要がある．すなわち，外場の入る線は4－ポテンシャルの3次元フーリエ成分

$$A^{(e)}(\boldsymbol{q})=\int A^{(e)}(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}d^3x$$

に対応させられる．頂点における保存則は，$q^\mu=(0,\boldsymbol{q})$ であること，したがって不定のままになっている $\boldsymbol{q}$ は $d^3\boldsymbol{q}/(2\pi)^3$ について積分しなければならないことを考慮して書かなければならない．この規則にしたがって計算された振幅 M_{fi} は(65.25)によって散乱断面積を決定する．

使って

$$\Phi(q) = \frac{4\pi Z|e|}{q^2 + \delta^2} \tag{118.9}$$

と置くことである．これにより散乱振幅の発散は消去され，断面積に対する最終的な答のなかでは，もう $\delta = 0$ と置くことができる．

(118.9) を (118.7) に代入して

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p')[(\gamma^0 \varepsilon + m)J_1 + \boldsymbol{\gamma J}]u(p)$$

を得る．ここで

$$J_1 = \int \frac{d^3 f}{[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2][(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p})^2 + \delta^2][\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{f}^2 + i0]},$$
$$\boldsymbol{J} = \int \frac{\boldsymbol{f}\, d^3 f}{[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2][(\boldsymbol{f} - \boldsymbol{p})^2 + \delta^2][\boldsymbol{p}^2 - \boldsymbol{f}^2 + i0]} \equiv \frac{\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'}{2} J_2 \tag{118.10}$$

と置いた．ここで $\boldsymbol{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \boldsymbol{p}'^2$ および積分 $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}'$ とに関して対称である．ベクトルの対称性の考察から，すでにベクトル $\boldsymbol{J}$ は $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}'$ に平行でなければならないことは明らかであった．今は等式

$$\boldsymbol{\gamma p} u = (\gamma^0 \varepsilon - m) u, \quad \bar{u}' \boldsymbol{\gamma p}' = \bar{u}'(\gamma^0 \varepsilon - m)$$

を使って行列 $\boldsymbol{\gamma}$ を消去し

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{2}{\pi} Z^2 \alpha^2 \bar{u}(p')[\gamma^0 \varepsilon (J_1 + J_2) + m(J_1 - J_2)]u(p) \tag{118.11}$$

を得る．

これから先の計算を実行するために（§81のときと同様に）双スピノール振幅 u および u' から，それに対応する（(23.9) および (23.11) にしたがって）3次元スピノール w および w' に移ろう．直接の掛け算により

$$\bar{u}' u = w'^* \{(\varepsilon + m) - (\varepsilon - m)\cos\theta + i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon - m)\sin\theta\} w,$$
$$\bar{u}' \gamma^0 u = w'^* \{(\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta - i\boldsymbol{\nu\sigma}(\varepsilon - m)\sin\theta\} w$$

を得る．ここで

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{[\boldsymbol{nn}']}{\sin\theta}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}, \quad \boldsymbol{n}' = \frac{\boldsymbol{p}'}{|\boldsymbol{p}'|}, \quad \cos\theta = \boldsymbol{nn}'$$

である．このあと振幅 (118.11) はつぎの形に表わされる[1]．

1) 量 A および B の定義はここでは §37 および III，§138 における定義に対応し，§81 の定義とは因子が異なっている．

$$M_{fi}^{(2)} = 4\pi w'^* (A^{(2)} + B^{(2)} \boldsymbol{\nu\sigma}) w,$$
$$A^{(2)} = -\frac{1}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 \{[(\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta]\varepsilon (J_1 + J_2) + [(\varepsilon + m) - (\varepsilon - m)\cos\theta] m (J_1 - J_2)\}, \qquad (118.12)$$
$$B^{(2)} = \frac{i}{2\pi^2} Z^2 \alpha^2 (\varepsilon - m)\sin\theta [\varepsilon (J_1 + J_2) - m (J_1 - J_2)].$$

1次近似の散乱振幅は同様な記法ではつぎの形になる.

$$M_{fi}^{(1)} = 4\pi w'^* (A^{(1)} + B^{(1)} \boldsymbol{\nu\sigma}) w,$$
$$A^{(1)} = \frac{Z\alpha}{\boldsymbol{q}^2}[(\varepsilon + m) + (\varepsilon - m)\cos\theta], \qquad (118.13)$$
$$B^{(1)} = -i\frac{Z\alpha}{\boldsymbol{q}^2}(\varepsilon - m)\sin\theta.$$

ここで $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$ である.

散乱断面積および偏りの効果は量 $A = A^{(1)} + A^{(2)}$ および $B = B^{(1)} + B^{(2)}$ を使い, III, §138 で得られた公式で表わされる. 偏りのない電子の散乱断面積は

$$d\sigma = (|A|^2 + |B|^2)\, do' \approx d\sigma^{(1)} + 2(A^{(1)} \operatorname{Re} A^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} B^{(2)})\, do'$$

である. (118.12), (118.13) を代入したのち, 簡単な計算で

$$d\sigma^{(2)} = -do' \frac{Z^3 \alpha^3 \varepsilon^3}{\pi^2 \boldsymbol{p}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \left[\left(1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{Re}(J_1 + J_2) + \frac{m^2}{\varepsilon^2} \operatorname{Re}(J_1 - J_2)\right] \qquad (118.14)$$

となる. ここで $v = |\boldsymbol{p}|/\varepsilon$ は電子の速度で, θ は散乱角である. 散乱の結果電子は偏る. 終りの電子の偏りのベクトルは

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2\operatorname{Re}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}\boldsymbol{\nu} \approx \frac{2(A^{(1)} \operatorname{Re} B^{(2)} - iB^{(1)} \operatorname{Im} A^{(2)})}{|A^{(1)}|^2 + |B^{(1)}|^2}\boldsymbol{\nu},$$

あるいは (118.12), (118.13) を代入したのち

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{4Z\alpha m \boldsymbol{p}^4}{\pi^2 \varepsilon^2} \frac{\sin^3\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1 - v^2 \sin^2\frac{\theta}{2}} \operatorname{Im}(J_1 - J_2)\boldsymbol{\nu}, \qquad (118.15)$$

となる.

積分 J_1 および J_2 の計算に移ろう. 公式 (127.2) にしたがってパラメータ化の方法を適用すると簡単になる. 積分 J_1 は

$$J_1 = -2\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int \frac{d^3 f\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 \cdot \delta(1 - \xi_1 - \xi_2 - \xi_3)}{\{[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2]\xi_1 + [(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{f})^2 + \delta^2]\xi_2 + [\boldsymbol{f}^2 - \boldsymbol{p}^2 - i0]\xi_3\}^3}$$

の形になる．$d\xi_3$ についての積分は δ－関数を消去する．分母のなかの項に入れて

$$J_1=-2\int_0^1\int_0^{1-\xi_2}\int\frac{d^3f\,d\xi_1\,d\xi_2}{\{\delta^2(\xi_1+\xi_2)+\boldsymbol{p}^2(2\xi_1+2\xi_2-1)-2\boldsymbol{f}(\xi_1\boldsymbol{p}'+\xi_2\boldsymbol{p})+\boldsymbol{f}^2-i0\}^3}$$

を得る．$\boldsymbol{f}$ の代りに新しい変数 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{f}-\xi_1\boldsymbol{p}'-\xi_2\boldsymbol{p}$ を導入し，d^3f についての積分を

$$\int\frac{d^3k}{(\boldsymbol{k}^2-a^2-i0)^3}=i\frac{\pi^2}{4a^3}$$

の形にする．したがって，

$$J_1=-\frac{i\pi^2}{2}\int_0^1\int_0^{1-\xi_2}\frac{d\xi_1\,d\xi_2}{\{\boldsymbol{p}^2(\xi_1^2+\xi_2^2-2\xi_1-2\xi_2+1)+2\xi_1\xi_2\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'-\delta^2(\xi_1+\xi_2)-i0\}^{3/2}}.$$

ξ_1 および ξ_2 の代りに対称的な結合 $x=\xi_1+\xi_2$ および $y=\xi_1-\xi_2$ を導入する．dy についての（0から x までの極限内での）積分は初歩的であり

$$J_1=-\frac{i\pi^2}{2|\boldsymbol{p}|^3}\int_0^1\frac{x\,dx}{\left[bx^2-2x+1-\dfrac{\delta^2}{\boldsymbol{p}^2}x-i0\right]\left[(1-x)^2-\dfrac{\delta^2}{\boldsymbol{p}^2}x-i0\right]^{1/2}}$$

を与える．ここで

$$b=\frac{\boldsymbol{p}^2+\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}{2\boldsymbol{p}^2}=\cos^2\frac{\theta}{2}$$

である．

$\delta\to 0$ のときに，dx についての積分を計算するために，積分領域を二つの部分に分ける．すなわち

$$\int_0^1\cdots dx=\int_0^{1-\delta_1}\cdots dx+\int_{1-\delta_1}^1\cdots dx\qquad\left(1\gg\delta_1\gg\frac{\delta}{|\boldsymbol{p}|}\right)$$

である．第1の積分では $\delta=0$ と置いてよい．このとき[1)]

$$\int_0^{1-\delta_1}\cdots dx=\frac{1}{2(1-b)}\ln\frac{(1-x)^2}{(bx^2-2x+1-i0)}\bigg|_0^{1-\delta_1}=\frac{1}{2(1-b)}\left[\ln\frac{\delta_1^2}{1-b}+\pi i\right]$$

となる．第2の積分では $(1-x^2)$ の項の外は $x=1$ と，また分母の最初の括弧のなかでは $\delta=0$ と置くことができる．このとき[2)]

1) 迂回の規則（$i0$ の項）は，0から $1-\delta_1$ へ移るときの対数記号のなかの式の引数の変化を決定することができる．分岐点を下に迂回すると，引数は0から $-\pi$ まで変化する．

2) ここでは迂回の規則は，根号内の式が正の値から負の値になるときの根の符号を決定する．

$$\int_{1-\delta_1}^{1} \cdots dx = -\frac{1}{1-b}\int_0^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\boldsymbol{p}^2} - i0\right)^{1/2}}$$
$$= -\frac{1}{1-b}\left[\int_{\delta/|\boldsymbol{p}|}^{\delta_1} \frac{dx'}{\left(x'^2 - \frac{\delta^2}{\boldsymbol{p}^2}\right)^{1/2}} + i\int_0^{\delta/|\boldsymbol{p}|} \frac{dx'}{\left(\frac{\delta^2}{\boldsymbol{p}^2} - x'^2\right)^{1/2}}\right]$$
$$= -\frac{1}{1-b}\left[\ln\frac{2|\boldsymbol{p}|\delta_1}{\delta} + i\frac{\pi}{2}\right]$$

となる．二つの積分を一緒にすると，当然のことながら δ_1 という量は落ちる．そして

$$J_1 = \frac{i\pi^2}{2|\boldsymbol{p}|^3 \sin^2\frac{\theta}{2}} \ln\left(\frac{2|\boldsymbol{p}|}{\delta}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{118.16}$$

が得られる．

積分 J_2 も同様に計算され

$$J_2 = J_1 - \frac{\pi^3\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{4|\boldsymbol{p}|^3\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{i\pi^2}{2|\boldsymbol{p}|^3\cos^2\frac{\theta}{2}} \ln\sin\frac{\theta}{2} \tag{118.17}$$

に等しい．

これらの式を (118.14)，(118.15) に代入することが残っている．そしてわれわれは最終的な結果を得る[1]．

$$d\sigma^{(2)} = \frac{\pi(Z\alpha)^3\varepsilon}{4|\boldsymbol{p}|^3\sin^3\frac{\theta}{2}}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right)do', \tag{118.18}$$

$$\boldsymbol{\zeta}' = \frac{2Z\alpha m|\boldsymbol{p}|}{\varepsilon^2} \frac{\sin^3\frac{\theta}{2}\ln\sin\frac{\theta}{2}}{\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}}\boldsymbol{\nu}. \tag{118.19}$$

1次のボルン近似では (同一外場内での) 電子および陽電子の散乱断面積は同じである．2次近似ではこの対称性は消失する．陽電子 (電荷が $+|e|$) の散乱に対して，1次近似の振幅 (118.6) は同じ符号をもち，$M_{fi}^{(2)}$ の符号は変わらない．したがって，$M_{fi}^{(1)}$ と $M_{fi}^{(2)}$ のあいだの干渉項であるところの断面積 $d\sigma^{(2)}$ の符号は変わる．同じことが偏りのベクトルに対する式 (118.19) にも起こっている．一般に，電子散乱に対する式から陽電子散乱に対する式への移行は，形式的な置き換え $Z\to -Z$ によって行なうことができる．

1) 正しい結果は最初にマッキンレーおよびフェシュバッハ (W. A. McKinley, H. Feshbach, 1948) により得られた．それは散乱の部分波の位相の正確な式から出発した．摂動論による計算はダリッツ (R. H. Dalitz, 1950) によって遂行された．

§ 119. 外場内の電子散乱に対する輻射補正

外場内での電子散乱に対する輻射補正の計算に移ろう (J. Schwinger, 1949).

散乱振幅のこれに対応する部分は，二つの図形 (118.2) によって記述される．これらのなかの1番目のものは振幅に対してつぎの寄与をする．

$$-(\overline{u}'\gamma^0 u)\frac{\mathcal{P}(-\boldsymbol{q}^2)}{4\pi}D(-\boldsymbol{q}^2)\cdot e\Phi(\boldsymbol{q}).$$

ここで $\mathcal{P}(-\boldsymbol{q}^2)$ は図形中の環に対応する偏りの演算子である．2番目の図形の寄与は

$$-(\overline{u}'\Lambda^0 u)e\Phi(\boldsymbol{q})$$

である．ここで Λ^0 は頂点演算子 ($\Gamma^\mu=\gamma^\mu+\Lambda^\mu$) のなかの付加項である．(113.6) にしたがって

$$\Lambda^0=\gamma^0[f(-\boldsymbol{q}^2)-1]-\frac{1}{2m}\sigma^{0\nu}q_\nu g(-\boldsymbol{q}^2)$$

である．両方の寄与を加えて

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(3)}&=-(\overline{u}'\gamma^0 Q_{輻}u)e\Phi(\boldsymbol{q}),\\ Q_{輻}(\boldsymbol{q})&=f(-\boldsymbol{q}^2)-1-\frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\mathcal{P}(-\boldsymbol{q}^2)+\frac{1}{2m}g(-\boldsymbol{q}^2)\boldsymbol{q}\boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\tag{119.1}$$

を得る[1]．

まず第一に，形状因子 $f(-\boldsymbol{q}^2)$ に含まれ，したがって散乱振幅 (119.1) に含まれる赤外発散の問題を検討しよう．

すでに示したように (§95)，純弾性散乱の正確な振幅それ自体は0になる，すなわち何の意味ももたない．与えられた値 $\omega_{\max}$ より小さいエネルギーの軟光子をいくつでも放出できる過程で定義される散乱振幅だけが物理的意味をもっている．ここで

$$\omega_{\max}\ll m$$

である．言いかえれば，つぎの和だけが意味をもっている．

$$d\sigma=d\sigma_{弾}+d\sigma_{弾}\int_0^{\omega_{\max}}dw_\omega+d\sigma_{弾}\frac{1}{2!}\int_0^{\omega_{\max}}dw_{\omega_1}\int_0^{\omega_{\max}}dw_{\omega_2}+\cdots.\tag{119.2}$$

ここで $d\sigma_{弾}$ は光子の放出を伴わない散乱断面積である．また dw_ω は電子による振動数 ω の光子放出の微分確率である．このとき $d\sigma_{弾}$ 自体は摂動の級数の形で，すなわち α に

1) 変形の際に，もしも $q^\mu=(0,\boldsymbol{q})$ ならば $q_\mu=(0,-\boldsymbol{q})$ であることを念頭に置くこと！ したがって $\sigma^{0\nu}q_\nu=-\gamma^0\boldsymbol{q}\boldsymbol{\gamma}$ である．

ついての冪展開の形で計算されるものと仮定される[1].

ここで，(119.2) のすべての項のなかから α についての各次数の項を一緒にまとめると，$d\sigma$ が α についての展開の形で求められる．そしてこの各項は有限である．

1次のボルン近似では $d\sigma_{弾} \sim \alpha^2$ である．この項は，当然のことながらそれ自身で意味をもっている．もしもわれわれが $d\sigma_{弾}$ のなかのつぎの補正項 ($\sim \alpha^3$) を計算しようとすれば，これとならんで和(119.2)のなかの第2項もまたとらなければならない．$dw_\omega \sim \alpha$ であるから，$d\sigma_{弾} \sim \alpha^2$ を掛けると，ここからも $\sim \alpha^3$ の量が出てくる．これらの二つの量を一緒にすると，赤外発散が消えることを示そう．

形状因子 f のなかの発散項は，(114.17) によって

$$-\frac{\alpha}{2} K\left(\frac{|\boldsymbol{q}|}{2m}\right) \ln \frac{m}{\lambda}$$

を得る[2]．振幅(119.1)のなかの対応する項は

$$\frac{\alpha}{2} K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot (\overline{u}' \gamma^0 u) e\Phi(\boldsymbol{q})$$

である．また散乱断面積 (118.5) のなかでは

$$d\sigma^{赤外} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot |\overline{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(\boldsymbol{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2}$$

である．これをボルン断面積

$$d\sigma^{(1)} = |\overline{u}' \gamma^0 u|^2 |e\Phi(\boldsymbol{q})|^2 \frac{do'}{16\pi^2}$$

とくらべて

$$d\sigma^{赤外} = -\alpha K \ln \frac{m}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)} \qquad (119.3)$$

を得る．他方，(117.11) からの $\int dw_\omega$ を使った (119.2) の第2項は

$$d\sigma_{弾} \int_0^{\omega_{\max}} dw_\omega = \alpha K \ln \frac{2\omega_{\max}}{\lambda} \cdot d\sigma^{(1)} \qquad (119.4)$$

を与える．最後に (119.3) と (119.4) とを一緒にして

---

1) 確率 dw に関しては，そこでの輻射補正が量 $\omega_{\max}$ に依存することを勘定に入れる必要がある．$\omega \to 0$ は古典的な場合に対応し，輻射補正は消える．したがって，十分に小さい $\omega_{\max}$ を選ぶことにより，いつもそれを小さくすることができる．

2) $|\boldsymbol{q}|$ と (114.17) に使われている変数 ξ のあいだの関係

$$|\boldsymbol{q}|/m = (1-\xi)/\sqrt{\xi}$$

を使って，これは容易に証明される．

$$- d\sigma^{(1)}\cdot \alpha K\left(\frac{|\boldsymbol{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} \tag{119.5}$$

を得る.

われわれは，仮想的軟光子（$|\boldsymbol{k}|\sim\lambda$）からの発散する寄与は，同じような現実の光子の輻射からの寄与と，事実上帳消しになってしまう．このような事情が任意の他の散乱過程にも起こっている.

同時に，散乱断面積の $\omega_{\max}$ への依存性が現われる．この依存性は，散乱を任意個の軟光子を放出してもよい過程であるとした，散乱の定義自身に $\omega_{\max}$ という量が含まれている結果である．当然のことながらこの過程の断面積は，その散乱過程に関連して放出される光子の振動数の上限 $\omega_{\max}$ が低ければ低いほど小さくなる.

今度は散乱断面積に対する輻射補正の完全な式を見いだそう．標準的な規則にしたがって（(66.7) 参照），電子の初めの偏りについて平均し，終りの偏りについて和をとった断面積に対し

$$\begin{aligned} d\sigma &= d\sigma^{(1)} + d\sigma_{\text{輻}} \\ &= |e\Phi(\boldsymbol{q})|^2\,\mathrm{Sp}\,\{(\hat{p}'+m)(\gamma^0+\gamma^0 Q_{\text{輻}})(\hat{p}+m)(\gamma^0+\gamma^0\bar{Q}_{\text{輻}})\}\frac{do'}{32\pi^2} \end{aligned} \tag{119.6}$$

を得る．(119.1) にしたがって

$$Q_{\text{輻}} = a + b\boldsymbol{\gamma q},\quad \bar{Q}_{\text{輻}} = \gamma^0 Q^+_{\text{輻}}\gamma^0 = a - b\boldsymbol{\gamma q},$$

$$a = f(-\boldsymbol{q}^2) - 1 - \frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\mathcal{P}(-\boldsymbol{q}^2),\quad b = \frac{1}{2m}g(-\boldsymbol{q}^2)$$

である．a および b について1次の項までの精度で，(119.6) のなかの跡は

$$\frac{1}{4}\mathrm{Sp}\,\{\cdots\} = 2\left(\varepsilon^2 - \frac{\boldsymbol{q}^2}{4}\right)(1+2a) - 2bm\boldsymbol{q}^2$$

に等しい．したがって

$$d\sigma_{\text{輻}} = 2\left\{f_\lambda(-\boldsymbol{q}^2) - 1 - \frac{1}{\boldsymbol{q}^2}\mathcal{P}(-\boldsymbol{q}^2) - \frac{\boldsymbol{q}^2}{4\varepsilon^2-\boldsymbol{q}^2}g(-\boldsymbol{q}^2)\right\}d\sigma^{(1)} \tag{119.7}$$

である．ここで $d\sigma^{(1)}$ は偏りのない電子の散乱のボルン断面積 (81.5) である．形状因子 f には添字 λ がつけられているが，それが《光子の質量 λ で切断された》ことを思い起こさせるためである.

(119.7) に軟光子放出の断面積を付け加えることが残っている．もしも f_λ を

$$f_\lambda(-\boldsymbol{q}^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}K\left(\frac{|\boldsymbol{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{\lambda} + \alpha K_2 \tag{119.8}$$

の形に表わせば，(117.11) にしたがってこの追加は (119.7) で f_λ を

$$f\omega_{\max} = 1 - \frac{\alpha}{2}K\left(\frac{|\boldsymbol{q}|}{2m}\right)\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{\alpha}{2}K_1 + \alpha K_2 \qquad (119.9)$$

に置き換えることに帰してしまう．この置き換え (119.7) によって最終的な答がでる．

非相対論的極限で

$$f\omega_{\max} = 1 - \frac{\alpha\boldsymbol{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{11}{24}\right) \qquad (\boldsymbol{q}^2 \ll m^2) \qquad (119.10)$$

であることを指摘しておこう[1]．

外場の特殊性は断面積に対する輻射補正のなかには $d\sigma^{(1)}$ を通じてのみ入ってくることに注目しよう．(119.7) の波括弧内の因子は普遍的性質をもっている．非相対論的近似で

$$d\sigma_{輻} = -d\sigma^{(1)}\cdot\frac{2\alpha}{3\pi}\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{2\omega_{\max}} + \frac{19}{30}\right) \qquad (\boldsymbol{q}^2 \ll m^2) \qquad (119.11)$$

(ここには (119.7) のすべての項からの寄与が含まれている)．逆に超相対論的場合には，$f\omega_{\max} - 1$ を含む項が基本的な寄与をして

$$d\sigma_{輻} = -d\sigma^{(1)}\cdot\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{\max}} \qquad (\boldsymbol{q}^2 \gg m^2) \qquad (119.12)$$

が得られる．

結論として，ここで考察された輻射補正は，1次のボルン近似にない何らかの偏りの効果を引き出すものではないことを指摘しよう (この点で §118 で考察された2次のボルン近似の補正と異なっている)．1次のボルン近似の特殊性は，結局 S-行列のエルミート性と関係があるということになる．しかしながら，この性質はいま考察された輻射補正の計算の際にももち越される．なぜかというと，この近似では散乱チャネルに，どんな現実の中間状態も存在しない (したがってユニタリー関係式の右辺が0になる) からである[2]．

---

1) この式と非相対論的な式 (114.20) との異なる点は，置き換えが

$$\ln\lambda \longrightarrow \ln 2\omega_{\max} - \frac{5}{6}$$

になることである．

2) 摂動論の2次近似でのみ現われる過程に対する輻射補正の計算は非常に膨大で，この本で再現することはしない．ただいくつかの文献を引用するだけにとどめよう．電子による光子の散乱に対する輻射補正は L. M. Brown, R. Feynman, *Phys. Rev.* **85**, 231 (1952)；2光子性対消滅は J. Harris, L. M. Brown, *Phys. Rev.* **105**, 1656 (1957)；電子および陽電子による電子散乱は M. Redhead, *Proc. Roy. Soc.* **A 220**, 219 (1953)；エル・ヴェ・ポロヴィン，ЖЭТФ, **31**, 449 (1956)；制動輻射はベ・イ・フォーミン，ЖЭТФ, **35**, 707 (1958).

§120. 輻射による原子準位のずれ

輻射補正の結果，外場内の電子の束縛状態のエネルギー準位のずれ（いわゆる**ラム・シフト**）が生じる．水素原子（あるいは水素原子類似イオン）の準位のずれが，この種のなかで最も重要である[1]．

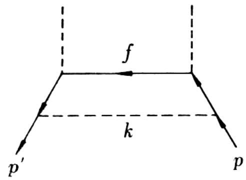
エネルギー準位に対する補正の首尾一貫した計算法は，外場内の正確な電子伝播関数（§106）の使用に基礎を置いている．しかし，もしも

$$Z\alpha \ll 1 \tag{120.1}$$

ならば，もっと簡単な方法を使うのが便利である．そこでは外場は摂動とみなされる．

外場についての1次近似では，電子と定電場の相互作用のなかの輻射補正は，このような場のなかでの電子散乱の問題と関連してわれわれがすでに考察した二つの図形（118.2）を使って記述される．一つの問題から他への移行は，定式化の簡単な変更を要求するだけである（下記参照）．

しかしながら，このような方法によっては，準位のずれのなかの，振動数が十分に大きい仮想的光子との相互作用に起因する部分だけを求めることができるだけである．実際に，例として電子散乱振幅に対するつぎのような（外場による）輻射補正を考察しよう．



(120.2)

((118.2,b）と違って，この図形は二つの外場の頂点を含んでいる）．k_0 が十分大きい d^4k による積分領域では，この補正は $Z\alpha$ についての余分の階乗を含み，したがって重要でない．しかし図形に外場の第2の頂点を導入することは，そこにもう一つの電子伝播関数 $G(f)$ を導入することになる．k が小さい（そして外端 p および p' が非相対論的な）とき，伝播関数 $G(f)$ の極に近いような仮想的電子の運動量 f が重要である．このように

---

1) 水素準位のずれの計算は最初にベーテが行なった（H. A. Bethe, 1947）．そしてこれは非相対論的考察に基づき，対数精度のものである．この計算は量子電気力学のその後のすべての発展に対する引き金の役を果たした．準位 $2s_{1/2}$ と $2p_{1/2}$ の（摂動論の最初の消えない近似での）差はクロルおよびラムにより正確に計算された（N. M. Kroll, W. E. Lamb, 1949）．しかし準位のずれに対する完全な式はヴァイスコップおよびフレンチが求めた（V. Weisskopf, J. B. French, 1949）．

して現われた小さい分母が，余分の因子 $Z\alpha$ を打ち消すことになる．明らかに外場についてのすべての次数の補正についてもまったく同様になる．言いかえれば，仮想的光子の振動数が小さい極限では，外場は正確に考慮する必要がある．

求める準位のずれ δE_s[1] を二つの部分に分けよう．

$$\delta E_s = \delta E_s^{(\mathrm{I})} + \delta E_s^{(\mathrm{II})}. \tag{120.3}$$

これらはそれぞれ，領域 I）$k_0 > \kappa$，II）$k_0 < \kappa$ の振動数をもった仮想的光子との相互作用から出てきている．ここで κ はつぎのように選ばれる．

$$(Z\alpha)^2 m \ll \kappa \ll m \tag{120.4}$$

（$Z^2\alpha^2 m$ は原子内電子の結合エネルギーの大きさの程度である）．このとき領域 I では，原子核の電場は 1 次近似だけを考慮すれば十分である．領域 II では，核の電場を正確に考慮する必要がある．しかしそのあとで（条件 $\kappa \ll m$ であるから），電子そのものについてだけでなく，そのすべての中間状態について，非相対論的近似でこの問題を解くことができる．(120.4) の条件があると，二つの計算法の適用可能な領域は重なっているので，準位に対する補正の両方の部分の厳密な《つなぎ合わせ》をすることができる．

A. ずれの高振動数部

初めに領域 I を考察しよう．ここでは散乱振幅 (119.1) に対する補正が利用できる．しかしながら，それから領域 II に属する仮想的光子の寄与をあらかじめ除いておくことが必要である．これらの光子は形状因子 g にはわずかの寄与しかしないので，これは変える必要はない．振動数の小さい仮想的光子は関数 f に対し，赤外発散からくる大きい寄与をする．したがって，(119.1) のなかの関数 f としては，$k_0 < \kappa$ の領域がすでに除かれている関数 f_κ を代入する必要がある．

このような取り除きは，$k_0 < \kappa$ の領域での積分を f から差し引くことにより，直接に行なうことができるはずである．しかしながら，§ 119 の結果を使うと，新しい計算をしないで求める結果を得ることができる．

このためには，$k_0 < \kappa$ の振動数の除去は，赤外切断の可能な方法のなかの一つであるとみなしてよいことに注意しよう．現実の軟光子放出の確率がこのように切り落とされる，すなわち，κ から与えられた $\omega_{\max}$ までの振動数の光子放出だけが《弾性》散乱の概念に含まれるという条件で，散乱断面積への補正に対する結果は，もちろん切断の方法に依存

1）この節では，E_s は静止エネルギーを含まない原子内電子のエネルギーを表わす．

してはいけない．$\omega_{\max}=\kappa$ に選べば，光子放出をあらわな形で勘定する必要はない．このことから明らかなように，単に $\omega_{\max}$ を κ に変えることによって，§119で定義された $f\omega_{\max}$ から f_κ が求められる．特に非相対論的な場合には

$$f_\kappa-1=-\frac{\alpha \boldsymbol{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\kappa}+\frac{11}{24}\right) \tag{120.5}$$

である．

今度は散乱振幅に対する補正 (119.1) を変形する．それは場のなかの電子の有効ポテンシャル・エネルギーに対する適当な補正の結果として表わそう．振幅 (119.1)

$$-e(u'^*\,\mathrm{Q}_{輻}\Phi u)$$

を，ボルン散乱振幅 (118.6)

$$-e(u'^*\,\Phi u)$$

とくらべて，(運動量表示で) 関数

$$e\delta\Phi(\boldsymbol{q})=e\,\mathrm{Q}_{輻}(\boldsymbol{q})\Phi(\boldsymbol{q}) \tag{120.6}$$

が，このような補正の役割を演じることがわかる．非相対論的場合には，$\mathcal{P}$ および g を (110.14) および (114.20) から，また f に対しては (120.5) から f_κ をもってきて

$$\delta\Phi(\boldsymbol{q})=\left\{-\frac{\alpha \boldsymbol{q}^2}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\kappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)+\frac{\alpha}{4\pi m}\boldsymbol{q}\boldsymbol{\gamma}\right\}\Phi(\boldsymbol{q}) \tag{120.7}$$

を得る．座標表示での対応する関数は[1)]

$$\delta\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\kappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\Delta\Phi(\boldsymbol{r})-i\frac{\alpha}{4\pi m}\boldsymbol{\gamma}\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) \tag{120.8}$$

となる．

準位のずれ $\delta E_s^{(\mathrm{I})}$ は，$e\delta\Phi(\boldsymbol{r})$ を原子内電子の非摂動状態の波動関数について平均することにより求められる．すなわち，対応する対角行列要素である[2)]．

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})}=\frac{e\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{2\kappa}+\frac{11}{24}-\frac{1}{5}\right)\langle s|\Delta\Phi|s\rangle-i\frac{e\alpha}{4\pi m}\langle s|\boldsymbol{\gamma}\nabla\Phi|s\rangle. \tag{120.9}$$

---

1) このポテンシャルに対する補正と，§111で考察された補正との違いを強調しておこう．後者はそのなかにクーロン場に対する真空の偏りの効果 (図形 (118.2, a))そのものだけを含んでいた．補正 (120.8) は場と電子との相互作用に対するもので，そのなかには電子の運動の変化の効果 (図形 (118.2, b)) もまた含んでいる．

2) 厳密に言えば，§114で定義された形状因子は，二つの電子自由端 ($p^2=p'^2=m^2$) のときの頂点演算子に関するものであった．原子内電子に対しては，エネルギー E_s，すなわち準位は一般に $\boldsymbol{p}$ とどのようにも結びつけられない．しかしながら，これらの違いは領域 I では無視することができる．

第1項では，平均の際に電子の非相対論的波動関数を使えば十分である．第2項では，このような近似では不十分である．非相対論的波動関数によるゼロ近似は，行列 $\boldsymbol{\gamma}$ に対角要素がないために0になる．したがってここでは §33 で見いだされた近似の相対論的波動関数 $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ を使う必要がある．ここで（標準表示では）成分 χ は小さいとしておく．

$$\psi^* \boldsymbol{\gamma} \psi = \varphi^* \boldsymbol{\sigma} \chi - \chi^* \boldsymbol{\sigma} \varphi$$

が成り立ち，(33.4) から

$$\chi = \frac{1}{2m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \varphi = -\frac{i}{2m} \boldsymbol{\sigma} \nabla \varphi$$

を代入して

$$\langle s | \boldsymbol{\gamma} \nabla \Phi | s \rangle = -\frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* (\boldsymbol{\sigma} \nabla \Phi)(\boldsymbol{\sigma} \nabla \varphi) + (\nabla \varphi^* \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{\sigma} \nabla \Phi) \varphi \} \, d^3x$$
$$= \frac{i}{2m} \int \{ \varphi^* \nabla \Phi \cdot \varphi - 2i \boldsymbol{\sigma} \varphi^* [\nabla \Phi \cdot \nabla \varphi] \} \, d^3x$$

を得る（積分の変形には恒等式 (33.5) が使われ，部分積分が行なわれた）．$\Phi = \Phi(r)$ であるから

$$\nabla \Phi = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d\Phi}{dr}$$

である．したがって

$$-i \boldsymbol{\sigma} [\nabla \Phi \cdot \nabla] = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l}$$

である．ここで $\mathbf{l} = -i[\mathbf{r} \nabla]$ は軌道角運動量の演算子である．最後に得られた式を集めて (120.9) に代入し

$$\delta E_s^{(\mathrm{I})} = \frac{e^3}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{2\kappa} + \frac{19}{30} \right) \langle s | \Delta \Phi | s \rangle + \frac{e^3}{4\pi m^2} \left\langle s \left| \boldsymbol{\sigma} \mathbf{l} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right| s \right\rangle \quad (120.10)$$

を得る．ここでは今や，二つの項での平均は非相対論的波動関数を用いて行なわれる．

B. ずれの低振動数部

準位のずれの2番目の部分の計算に対しての，最終的にユニタリー条件に基づいた方法が用いられる．

光子放出の可能性のために，原子の励起状態は（厳密に定常的でなく）準定常的である．このような状態には複素エネルギーを付与することができる．このとき，虚部は $-w/2$ に等しく，w は状態の崩壊確率で今の場合では光子放出の全確率（III，§132 参照）であ

る．非相対論的近似で輻射は２重極輻射であり，(45.7) にしたがって

$$\mathrm{Im}\,\delta E_s = -\frac{1}{2}w_s = -\frac{2}{3}\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_s - E_{s'})^3$$

となる（ここで和はすべての低い準位，$E_{s'} < E_s$ について行なわれる）．あるいは同等な形

$$\mathrm{Im}\,\delta E_s = -\frac{2}{3}\int_0^\infty d\omega\cdot\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_s - E_{s'})^3\,\delta(E_s - E_{s'} - \omega) \qquad (120.11)$$

になる．

ここで δE_s の実部を求めるために E_s を複素数とみなし解析接続を行なう必要がある．δ－関数が極から生じるとみなしてこれを行なえばよい．いつものように，極を迂回する規則は仮想的粒子の質量に，すなわちこの場合には，原子の中間状態の電子の質量 m'_s に負の虚部をつけることによって与えられる．この質量の役割は $m_{s'} = m + E_{s'}$ が果たしている．したがって

$$E_{s'} \longrightarrow E_{s'} - i0$$

とする必要がある．これから，つぎの置き換えが出てくる．

$$\delta(E_s - E_{s'} - \omega) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\frac{1}{E_s - E_{s'} - \omega + i0} \qquad (120.12)$$

((108.3) 参照)．

かくして (120.12) を (120.11) に代入して

$$\mathrm{Im}\,\delta E_s = \mathrm{Im}\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty d\omega\cdot\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2\frac{(E_s - E_{s'})^3}{E_s - E_{s'} - \omega + i0}$$

が得られる．求める解析接続はいまは単に記号 Im を落とすことによって得られる．しかしながら，われわれは δE_s のなかから，領域IIの振動数 $\omega < \kappa$ からの寄与に関する部分だけを分離する必要がある．このためには積分の上限を κ に変えれば十分である．積分を行ない，結果として

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})} = \frac{2}{3\pi}\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_{s'} - E_s)^3\ln\frac{\kappa}{E_{s'} - E_s + i0} \qquad (120.13)$$

を得る（不等式 (120.4) があるので，上限では差 $E_s - E_{s'}$ を κ にくらべて無視した）．先へいくと，われわれにとっては準位の実部のみが重要である．それは (120.13) で対数の引数を $\kappa/|E_{s'} - E_s|$ に置き換えることによって得られる．

(120.13) で２重極モーメント $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}$ の行列要素を，運動量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ とその微係数 $\dot{\boldsymbol{p}}$

の行列要素に換えて，$\ln\kappa$ を含む項を変形する．

$$\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_{s'}-E_s)^3=-\frac{e^2}{m^2}\sum_{s'}|\boldsymbol{p}_{ss'}|^2(E_{s'}-E_s)$$

$$=\frac{ie^2}{2m^2}\sum_{s'}\{(\dot{\boldsymbol{p}})_{ss'}\boldsymbol{p}_{s's}-\boldsymbol{p}_{ss'}(\dot{\boldsymbol{p}})_{s's}\}.$$

今度は，電子の運動の演算子方程式 $\dot{\mathbf{p}}=-e\nabla\Phi$ によって $\dot{\mathbf{p}}$ を置き換えて次式を得る．

$$\sum_{s'}|\boldsymbol{d}_{ss'}|^2(E_{s'}-E_s)^3=-\frac{ie^2}{2m^2}\sum_{s'}\{(\nabla\Phi)_{ss'}\boldsymbol{p}_{s's}-\boldsymbol{p}_{ss'}(\nabla\Phi)_{s's}\}$$

$$=\frac{ie^2}{2m^2}\langle s|\mathbf{p}\nabla\Phi-\nabla\Phi\mathbf{p}|s\rangle=\frac{e^3}{2m^2}\langle s|\Delta\Phi|s\rangle. \tag{120.14}$$

したがって，(120.13) をつぎの形に書き直すことができる．

$$\delta E_s^{(\mathrm{II})}=\frac{e^3}{3\pi m^2}\langle s|\Delta\Phi|s\rangle\ln\frac{2\kappa}{m}+\frac{2e^2}{3\pi}\sum_{s'}|\boldsymbol{r}_{ss'}|^2(E_{s'}-E_s)^3\ln\frac{m}{2|E_s-E_{s'}|}. \tag{120.15}$$

C. 全体としてのずれ

最後に，両方の部分を一緒にして準位のずれに対するつぎのような最終的な式を得る．

$$\delta E_s=\frac{2e^2}{3\pi}\sum_{s'}|\boldsymbol{r}_{ss'}|^2(E_{s'}-E_s)^3\ln\frac{m}{2|E_s-E_{s'}|}$$

$$+\frac{e^2}{3\pi m}\frac{19}{30}\langle s|\Delta\Phi|s\rangle+\frac{e^2}{4\pi m}\left\langle s\left|\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}\right|s\right\rangle \tag{120.16}$$

(当然のことながら，補助的な量 κ はこれからは落ちている)[1]．

(120.16) のなかのすべての行列要素は，原子内電子の非相対論的波動関数に関するものである．水素原子（あるいは水素類似原子のイオン）に対しては，これらの関数はただ三つの量子数だけに依存している．すなわち，主量子数 n，軌道角運動量 l およびその投影 m である（全角運動量 j にはよらない）．対応するエネルギー準位は n だけに依存する．つぎの記号を導入しよう[2]．

$$L_{nl}=\frac{n^3}{2m(Ze^2)^4}\sum_{n'l'm'}|\langle n'l'm'|\boldsymbol{r}|nlm\rangle|^2(E_{n'}-E_n)^3\ln\frac{m(Ze^2)^2}{2|E_{n'}-E_n|}. \tag{120.17}$$

エネルギー準位は $(Ze^2)^2$ に比例する．そして原子の大体の大きさは Ze^2 に比例する．ゆ

---

1) 準位のずれのつぎの次数の補正の決定は非常に複雑な計算を必要とする．これらの補正の最も完全な総括および系統的な導き方は（対応する文献とともに）つぎの論文に載っている：G. W. Frickson, D. R. Yennie, *Ann. of Phys.* **35**, 271, 447 (1965).

2) $\boldsymbol{r}$ の行列要素は量子数 j については対角型である．したがって，(120.16) の s についての和は n, l, m についての和になる．

えに (120.17) にしたがって定義された量 L_{nl} は Z には依存しない[1]. この量は数値計算で求めることができる.

さらに $l=0$ と $l\neq 0$ の場合を個々に考察しよう. $l=0$ の場合には (120.16) の最後の項は消える. 第2項では方程式

$$e\Delta\Phi = 4\pi Ze^2\delta(\boldsymbol{r})$$

が使われる. 核のクーロン場のポテンシャルがこれを満足している. これから

$$\langle nlm|\Delta\Phi|nlm\rangle = 4\pi Ze^2|\psi_{nlm}(0)|^2 = \begin{cases} 4m^3(Ze^2)^4 n^{-3} & (l=0) \\ 0 & (l\neq 0) \end{cases}$$

である ((34.3) 参照). 第1項では記号 (120.17) を導入し, 今一度等式 (120.14) を使う. すなわち

$$\sum_{n'l'm'} |\langle n'l'm'|\boldsymbol{r}|n00\rangle|^2(E_{n'}-E_n)^3 = \frac{e}{2m^2}\langle n00|\Delta\Phi|n00\rangle = \frac{2m(Ze^2)^4}{n^3}.$$

結果として, s-項のずれに対するつぎのような式が得られる (普通の単位で).

$$\delta E_{n0} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3}\left[\ln\frac{1}{(Z\alpha)^2} + L_{n0} + \frac{19}{30}\right]. \qquad (120.18)$$

L_{n0} という量のいくつかの数値はつぎのようになる.

$n=$	1	2	3	4	∞
$L_{n0}=$	-2.984	-2.812	-2.768	-2.750	-2.721

非摂動準位は $E_n = -mc^2(Z\alpha)^2/2n^2$ である. したがって, 輻射によるずれの相対的な大きさは

$$\left|\frac{\delta E_{n0}}{E_{n0}}\right| \sim Z^2\alpha^3\ln\frac{1}{Z\alpha} \qquad (120.19)$$

になる.

$l\neq 0$ の場合には (120.16) で第2項が消える. 第3項は §34 で導かれた公式を使って計算される. この項とともに, 準位のずれの量子数 j への依存性が現われる. 結果として

$$\delta E_{nlj} = \frac{4mc^2Z^4\alpha^5}{3\pi n^3}\left[L_{nl} + \frac{3}{8}\,\frac{j(j+1)-l(l+1)-3/4}{l(l+1)(2l+1)}\right] \quad (l\neq 0) \qquad (120.20)$$

となる.

このようにして輻射によるずれは, スピン軌道相互作用を勘定に入れたあとまで残って

---

1) 空間の等方性のために, (120.17) はもちろん量子数 m には依存しない.

いた最後の縮退，すなわち n および j が同一の値をもち，$l=j\pm1/2$ が異なった値をもつ準位の縮退を取り去った．数値 $L_{21}=+0.030$ および (120.18)～(120.20) から，水素原子の準位 $2s_{1/2}$ および $2p_{1/2}$ の差に対して，つぎの量が得られる．

$$E_{20\frac{1}{2}}-E_{21\frac{1}{2}}=0.41mc^2\alpha^5$$

(この差は 1050 メガサイクルに対応する)．

§121. 中間子原子の準位の輻射によるずれ

§115 の末尾で，輻射補正のなかの電子真空の偏りの効果 (2次近似) が，ミューオンの磁気モーメントに対して演ずる重要な役割が明らかにされた．μ-中間子原子，すなわち，陽子と μ-中間子とから成る水素類似の系の準位のずれに対しては，(1次近似ですでに) これと類似の事情がはるかに大きい程度で起こっている (А. Д. Галанин, И. Я. Померанчук, 1952)．

前節で行なわれた普通の原子の準位のずれの計算では，特に電子真空の偏りの効果 (図形(118.2, a)中の電子環) が考慮に入れられた．同様に，もしも中間子原子に対してミューオン真空の偏りの効果を考慮するならば，電子の質量 $m=m_e$ をミューオンの質量 m_μ に置き換えるだけで，すべての計算はこの場合に完全に移される．しかしながら，準位のずれの相対的な大きさは電子の質量に依存しないことがわかっているので ((120.19) 参照)，中間子水素に対してはまったく同じ結果が得られるはずである．

しかしながら，中間子原子の準位のずれに，電子真空の偏りの効果が非常に大きな寄与をすることが容易にわかる．事実，図形中の中間子環を電子環で置き換えることは，ミューオンの偏りの演算子を電子で置き換えることを意味する．しかし，偏りの演算子 $\mathcal{P}(q^2)$ は粒子の質量の (非相対論的な q^2 の値のとき) 逆2乗に比例する．したがって，上記の置き換えは効果を $(m_\mu/m_e)^2$ 倍に増大する結果になる．すなわち，準位のずれの大きさの程度はこの寄与によって決定される．これは

$$\frac{\delta E}{|E|}\sim\alpha^3\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2$$

になる．すなわち，普通の水素にくらべて4桁ぐらい大きくなる[1]．電子真空の偏りにクーロン・ポテンシャルのひずみが $\sim1/m_e$ の距離までひろがることを思い起こせば (§111)，

1) 同様な理由で，普通の水素原子準位のずれのなかで，ミューオン真空の偏りの寄与は，逆に無視できるほど小さい．

この効果の成因を最も直観的に理解することができる．普通の水素原子では，電子は核から $\sim 1/m_e\alpha$ の量の程度の距離にいる．すなわち，場のひずみの主要部分の外である．中間子水素ではミューオンは $\sim 1/m_\mu\alpha$ の距離にあり，ちょうどこの領域に入っている．

しかしながら，中間子原子の準位のずれの正確な計算に対しては，普通の原子の準位のずれの計算の際に用いられた式 (120.7) のなかで行なわれたように，偏りの演算子の近似的な非相対論の式を使ってはいけない．それは，中間子水素原子中のミューオンの特性運動量は $|\boldsymbol{p}_\mu| \sim \alpha m_\mu$ であるという事情によるものである．このような運動量は，ミューオンに対しては非相対論的であり，一方電子に関してはもう相対論的である．

したがって，われわれは電子真空の偏りによりひずんだ核の電場の有効ポテンシャルに対しては，完全に相対論的な表式 (111.5) を使う必要がある．原子内ミューオンの波動関数によって平均することにより準位のずれは決定される．

$$\delta E_{nl} = -|e|\int|\psi_{nl}|^2\,\delta\Phi(r)\,d^3x = -|e|\int_0^\infty R_{nl}^2(r)\,\delta\Phi(r)\,r^2\,dr. \qquad (121.1)$$

ここで R_{nl} はクーロン場の（非相対論的）波動関数の動径部分である．核の電荷 $Z|e|$ をもつ水素類似イオンに対しては，関数 $R_{nl}(r)$ は次元のない変数 $\rho = Z\alpha m_\mu r$（クーロン単位で測られた距離）を通じてのみ r に依存している．これを考慮し，(111.5) から（e_1 の代りに電荷 $Z|e|$ をもつ）$\delta\Phi(r)$ を代入し，積分 (121.1) をつぎの形にする．

$$\delta E_{nl} = -\frac{2}{3\pi}Z\alpha^3 m_\mu Q_{nl}\left(\frac{m_e}{Z\alpha m_\mu}\right). \qquad (121.2)$$

ここで

$$Q_{nl}(x) = \int_0^\infty \rho\,d\rho\int_1^\infty R_{nl}^2(\rho)\,e^{-2x\rho\zeta}\left(1+\frac{1}{2\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta^2}\,d\zeta$$

である．

こうして，中間子水素の初めのいくつかの準位に対し，数値計算は相対的なずれに対してつぎのような評価を与える．

$$\frac{\delta E_{10}}{|E_{10}|} = -6.4\cdot10^{-3}, \quad \frac{\delta E_{20}}{|E_{20}|} = -2.8\cdot10^{-4}, \quad \frac{\delta E_{21}}{|E_{21}|} = -2.0\cdot10^{-5}.$$

§ 122.　結合状態に対する相対論的方程式

前節で原子準位の輻射によるずれの計算に適用された方法は，ポジトロニウムの準位の補正の決定には適用できない．これは二つの同等な粒子からなる系で，そのいずれの一つ

も他に関して外場の源とはみなされない。

この問題を解く系統的な方法は，結合状態のエネルギー準位が，これら2粒子の相互散乱の正確な振幅の（重心系での全エネルギーの関数としての）極であることに基づいている．実際に，ポジトロニウムはその離散状態のおのおのでは一定の質量の《中間的粒子》とみなすことができ，その粒子の形成をへて電子と陽電子の散乱過程が起こるとされる．《1粒子性》中間状態のおのおのには散乱振幅の極が対応する（もちろん，これらの極は散乱される粒子の 4－運動量の非物理的領域にある）．

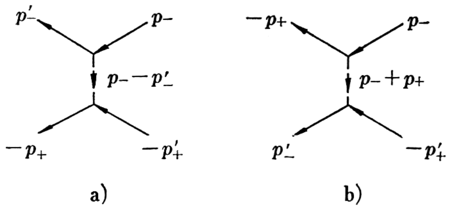
(103.17) にしたがって正確な散乱振幅は，正確な《4端子》頂点部 $\Gamma_{ik,lm}$ および粒子の偏った振幅 u から組み立てられる．明らかに後者は極性特異点とは無関係であり，したがってそれをまったく考慮しないで，その代りに頂点部そのものの極について議論した方が便利である．すなわち，関数

$$\Gamma_{ik,lm}(p'_-, -p_+;\ p_-, -p'_+) \tag{122.1}$$

である．ここで図形 (103.12) の外端の 4－運動量の記号は，電子による陽電子散乱に対応する．

極の存在を議論するには，もちろん正確な散乱振幅あるいは正確な頂点部を使わねばならないことを強調しておく．摂動論の級数の各項にはどれにも極は存在しない．これは，各近似のファインマン図形ではただ電子（および光子）線が現われ，《複合粒子》すなわちポジトロニウム全体の線は現われないことからも明らかなことである．これから今度は，その極の近くでの散乱振幅の計算は無限の図形列の和をつくることが要求される．どのような図形がこの無限の列に含まれるかを明らかにしよう．

摂動論の最初の消えない（α について1次の）近似で，頂点部 (122.1) は2次の二つの図形に対応する．すなわち



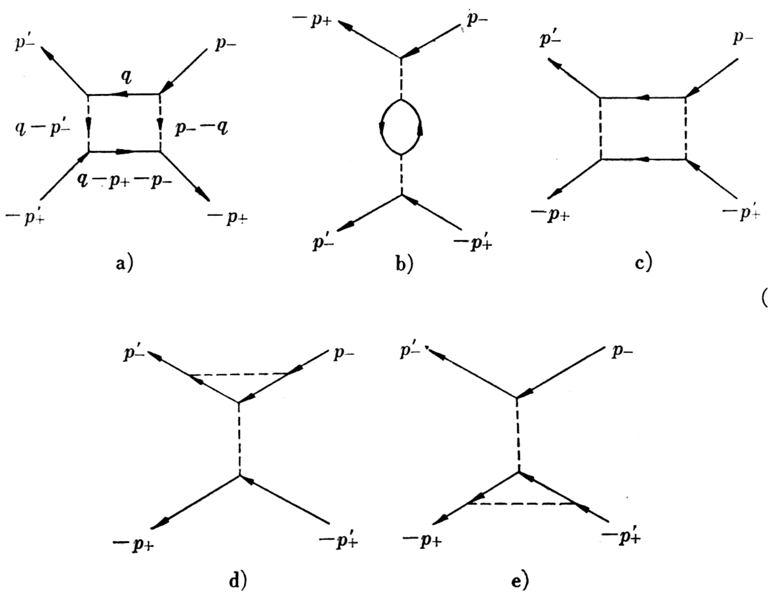
(122.2)

あるいは解析的な形で

$$\Gamma_{ik,lm} = -e^2\gamma^{\mu}_{il}\gamma^{\nu}_{mk}D_{\mu\nu}(p_- - p'_-) + e^2\gamma^{\mu}_{im}\gamma^{\nu}_{kl}D_{\mu\nu}(p_- + p_+) \tag{122.3}$$

になる．

つぎの（α について２次の）近似ではすでに４次の図形10個が得られる．つまり



(122.4)

および，$p_- \leftrightarrow -p'_+$ の置き換えだけ異なるあと五つの図形である．これらすべての図形は，図形 (122.2) にくらべて $e^2=\alpha$ の余分の乗冪をもっている．しかしながら，図形 a) ではこれらの余分な微少量の乗冪は（電子と陽電子の運動量が小さいときには）小さい分母で打ち消される．

すべての量を《重心》系で考察することにしよう．しかしながら，図形の外端の 4－運動量が物理的と仮定されていない（すなわち $p^2 \neq m$）ので，これらの系で $\boldsymbol{p}_+=-\boldsymbol{p}_-$ であっても $\varepsilon_+ \neq \varepsilon_-$ である．このようにして，端の 4－運動量は

$$p_-=(\varepsilon_-,\boldsymbol{p}),\quad p_+=(\varepsilon_+,-\boldsymbol{p}),$$
$$p'_-=(\varepsilon'_-,\boldsymbol{p}'),\quad p'_+=(\varepsilon'_+,-\boldsymbol{p}'),\qquad(122.5)$$
$$\varepsilon_-+\varepsilon_+=\varepsilon'_-+\varepsilon'_+$$

である．電子と陽電子のポジトロニウム内の結合エネルギーは $\sim m\alpha^2$ である．したがって，われわれにとって重要な散乱振幅の極の近傍では

$$|\boldsymbol{p}| \sim |\boldsymbol{p}'| \sim m\alpha \ll m,$$
$$|\varepsilon_- - m| \sim |\varepsilon_+ - m| \sim \frac{\boldsymbol{p}^2}{m} \sim m\alpha^2, \cdots \tag{122.6}$$

となる.

図形 (122.4, a) から頂点部への寄与は

$$\Gamma^{(4a)}_{ik,lm} = -ie^4 \int (\gamma^\lambda G(q)\gamma^\mu)_{il}(\gamma^\nu G(q-p_--p_+)\gamma^\rho)_{km} \times D_{\lambda\rho}(q-p'_-)D_{\mu\nu}(p_--q)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tag{122.7}$$

である. 積分 (122.7) のなかで二つの G 関数の極の両方に近い $q^\mu = (q_0, \boldsymbol{q})$ の値の領域が重要である. この領域で $|\boldsymbol{q}|$ および $|q_0 - m|$ は小さく, 電子伝播関数は

$$G(q) = \frac{\gamma^0 q_0 - \boldsymbol{\gamma q} + m}{(q_0+m)(q_0-m) - \boldsymbol{q}^2 + i0} \approx \frac{\gamma^0+1}{2}\frac{1}{q_0 - m - \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m} + i0},$$
$$G(q-p_--p_+) \approx \frac{\gamma^0-1}{2}\frac{1}{q_0 - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + m + \frac{\boldsymbol{q}^2}{2m} - i0} \tag{122.8}$$

である. これら二つの式の分母の極は変数 q_0 の複素平面内で実軸の異なる側にある. この軸に沿った積分路をたとえば上半平面に閉じて, 対応する極についての留数によって dq_0 の積分を計算する[1]. 結果として

$$\Gamma^{(4a)} \sim e^4 \int \frac{d^3q}{(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}'_-)^2(\boldsymbol{p}_- - \boldsymbol{q})^2\left(2m - \varepsilon_- - \varepsilon_+ + \frac{\boldsymbol{q}^2}{m}\right)}$$

であることがわかる. これから (122.6) を考慮した見積りは

$$\Gamma^{(4a)} \sim \alpha^2 \frac{(m\alpha)^3}{(m\alpha)^4 m\alpha^2} = \frac{1}{m^2\alpha}$$

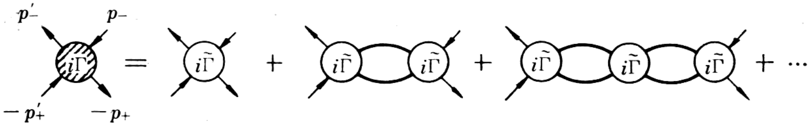
となる. Γ のなかの図形 (122.2, a) からの寄与 ((122.3) の第1項) はこのような程度の大きさをもっている. これは上述の主張を証明している. 同様な事情は, 摂動論のあらゆる高次近似でも起こっている.

このようにして, われわれにとって重要な極の近くの頂点部の計算には, 図形 (122.4, a) の内線の型の中間状態をもつ《異常に大きい》図形の無限の列の和をとることが必要となる. これらの図形に対しては, これらが端 p_-, $-p_+$ と p'_-, $-p'_+$ とのあいだで, ただ

1) 図形 (122.4, a) とは電子線の相互の向きだけが異なっている図形 (122.4, c) に対しては, 二つの極は実軸の一つの側にあることがわかるであろう. したがって, 上のような省略を行なったのち積分は一般に 0 になるはずである.

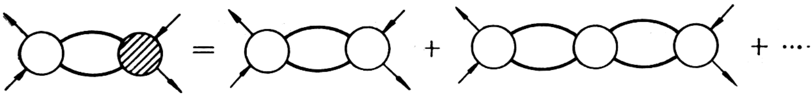
二つの電子線によって結びつけられている部分に切断しうることが特徴的である[1]．この条件を満足しないすべての図形の総和を《コンパクト》な頂点部と名付け，$\tilde{\Gamma}_{ik,lm}$ と書くことにしよう．異常に大きい図形はこのなかには現われないので，これらの量は普通の摂動論で計算することができる．したがって，1次近似では，$\tilde{\Gamma}$ は二つの2次の図形（122.2）で，4次近似では，4次の8個の図形（(122.4, a, b）を除いた）で定義される．

コンパクトでない頂点部を，それに含まれる《2重結合》の数によって分類して，Γ 全体をつぎの無限級数の形に表わすことができる．

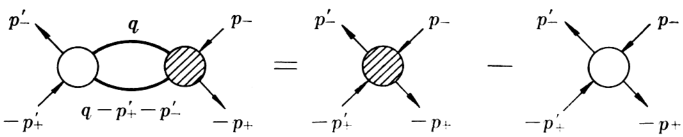


(122.9)

ここですべての太い内線は正確な伝播関数 $\mathcal{G}$ である（この形の級数はしばしば《はしご型》と呼ばれる）．この級数を加え合わせるために，これの右からもう一つの $\tilde{\Gamma}$ を《掛ける》[2]．



今度はこの級数をもとの級数（122.9）とくらべて



(122.10)

であることがわかる．このグラフの等式はつぎの積分方程式と同等である．

$$
\begin{aligned}
i\Gamma_{ik,lm}(p'_-,-p_+;\,p_-,-p'_+) &= i\tilde{\Gamma}_{ik,lm}(p'_-,-p_+;\,p_-,-p'_+) \\
&+\int\tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p'_-,q-p'_+-p'_-;\,q,-p'_+)\,\mathcal{G}_{st}(q)\,\mathcal{G}_{nr}(q-p'_+-p'_-) \\
&\times\Gamma_{tk,ln}(q,-p_+;\,p_-,q-p'_+-p'_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}.
\end{aligned}
\qquad (122.11)
$$

1） このような定義はそれ自体のなかに，すべての異常に大きい図形と，同時にそれとならんで，いくつかの《正常な》図形，たとえば図形（122.4, b）もまた含んでいる．

2） これは級数のすべての項に $\tilde{\Gamma}$ と二つの $\mathcal{G}$ を掛けて，新しい内部の結合線の 4－運動量についてしかるべき積分を行なうことである．

関数 $\tilde{\Gamma}$ および $\mathcal{G}$ は摂動論によって計算される．そのあとでは方程式 (122.11) から原理的には，要求される任意の精度で Γ を計算することが可能である．

エネルギー準位を決定するためには，関数 Γ の極の位置を知るだけで十分である．極の近くでは $\Gamma \gg \tilde{\Gamma}$ であり，したがって (122.11) の右辺の第1項 ((122.10) の右から2番目の図形) は無視してよく，方程式は Γ に関して斉次である．この方程式では変数 p_+, p_- および添字 k, l もまたパラメータとなり，それへの依存性は任意のままに残される (方程式自身によっては決定されない)[1]．これらのパラメータ (およびそれとともに残った変数 p'_+, p'_- の $'$) を落として，つぎの方程式を得る．

$$i\Gamma_{i,m}(p_-;\,-p_+) = \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q-p_+-p_-;\, q, -p_+)\mathcal{G}_{st}(q) \times \mathcal{G}_{nr}(q-p_+-p_-)\Gamma_{t,n}(q;\, q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tag{122.12}$$

(E. E. Salpeter, H. A. Bethe, 1951).

重心系 ($\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- = 0$) で書かれた方程式 (122.12) は $\varepsilon_+ + \varepsilon_-$ の特定の値のときに解がある．これがポジトロニウムのエネルギー準位を与える．関数 $\Gamma_{i,m}$ はここではただ補助的な役割を演じるだけである．これの代りに別の関数

$$\chi_{sr}(p_1, p_2) = \mathcal{G}_{st}(p_1)\Gamma_{t,n}(p_1;\, p_2)\mathcal{G}_{nr}(p_2) \tag{122.13}$$

を導入すると便利である．このとき，方程式 (122.12) は

$$i[\mathcal{G}^{-1}(p_-)\chi(p_-, -p_+)\mathcal{G}^{-1}(-p_+)]_{im} = \int \tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q-p_+-p_-;\, q, -p_+)\chi_{sr}(q, q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tag{122.14}$$

の形になる．ここで $\tilde{\Gamma}$ は積分演算子の核となっている．すでに述べたように $\tilde{\Gamma}$ は摂動論で計算することができる．同じことはもちろん関数 $\mathcal{G}^{-1}$ についても言えることである．

摂動論の (α についての) 1次近似で，(122.14) は，当然予期されるように，ポジトロニウムの非相対論的シュレーディンガー方程式に帰することを示そう．

最初の非相対論的近似で $\tilde{\Gamma}$ は一つの図形 (122.2, a) だけで定義される (消滅型の図形 (122.2, b) はこの近似では0になる)[2]．したがって，§83 における同様な導き方にしたがって，クーロン・ゲージでの光子伝播関数 (77.12), (77.13) を選ぶと便利である．こ

1) §106 の末尾の類似の事情とくらべること！ そこでは斉次積分方程式 (106.23) へ移るときに，変数 $\boldsymbol{r}'$ への依存性は落ちてしまった．

2) ポジトロニウム内の粒子の速度は $v/c \sim \alpha$ であることを思い起こそう．この意味で α についての展開と $1/c$ についての展開とは関係がある．

のときはそのなかの成分 D_{00} だけを残せば十分である．このとき

$$\tilde{\Gamma}_{ir,sm}(p_-, q-p_+-p_-;\ q, -p_+) = -e^2\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm}D_{00}(q-p_-)$$
$$= -U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_-)\gamma^0_{is}\gamma^0_{rm}$$

である．ここで

$$U(\boldsymbol{q}) = -\frac{4\pi e^2}{\boldsymbol{q}^2}$$

は陽電子と電子のクーロン相互作用のポテンシャル・エネルギーのフーリエ成分である．

方程式（122.14）は

$$i\chi_{im}(p_-, -p_+)$$
$$= \left[G(p_-)\gamma^0\int U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_-)\chi(q, q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\cdot\gamma^0 G(-p_+)\right]_{im} \qquad (122.15)$$

の形になる．ここではまた正確な伝播関数 $\mathcal{G}$ が自由電子の伝播関数 G により置き換えられている．後者には近似式が成り立ち（(122.8) 参照）

$$G(p_-) \approx \frac{1+\gamma^0}{2}g(p_-),\quad G(-p_+) = \frac{1-\gamma^0}{2}g(p_+)$$

である．ここで行列因子が分離された．また $g(p)$ はスカラー関数

$$g(p) = \frac{1}{\varepsilon - m - \dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + i0} \qquad (122.16)$$

である．これらの式を（122.15）に代入するとき，0と異なる行列要素

$$\left[\frac{1+\gamma^0}{2}\gamma^0\chi\gamma^0\frac{1-\gamma^0}{2}\right]_{im} = \left[\frac{\gamma^0+1}{2}\chi\frac{\gamma^0-1}{2}\right]_{im}$$

はすべて行列要素 $-\chi_{im}$ と一致することがわかる．したがって，行列方程式(122.15)はスカラー関数に対する方程式

$$i\chi(p_-, -p_+) = -g(p_-)g(p_+)\int U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_-)\chi(q, q-p_+-p_-)\frac{d^4q}{(2\pi)^4} \qquad (122.17)$$

と同等になる．

今度は p_+，p_- の代りに変数

$$p \equiv (\varepsilon, \boldsymbol{p}) = \frac{p_- - p_+}{2},\quad P = p_- + p_+$$

を導入しよう（これらは粒子の相対運動とポジトロニウム全体としての4－運動量である）．

重心系では

$$P = (E+2m, 0)$$

である．ここで全エネルギーを $E+2m$ と置いた．すなわち E は静止質量を基準としたエネルギー準位である．これらの変数を使って表わし (122.17) をつぎの形に書き直そう．

$$i\chi(p,P)=-g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\chi\left(q-\frac{P}{2},\ P\right)\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$
$$=-g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)\int U(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{p})\chi(q',P)\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}.$$

この方程式には P はすでにパラメータとして含まれ，関数 χ は等式の右辺に積分

$$\psi(\boldsymbol{q})=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(q,P)\,dq_0$$

の形でのみ含まれる．等式の両辺を $d\varepsilon$ について積分して，これから ψ に対する閉じた方程式

$$\psi(\boldsymbol{p})=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(p+\frac{P}{2}\right)g\left(-p+\frac{P}{2}\right)d\varepsilon\int U(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\psi(\boldsymbol{p})\frac{d^3q}{(2\pi)^3}$$

が得られる．ここで

$$g\left(\pm p+\frac{P}{2}\right)=\frac{1}{\pm\varepsilon+\dfrac{E}{2}-\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+i0}$$

である．たとえば，$d\varepsilon$ についての積分路を複素 ε 平面の上半面で閉じて，対応する極の留数によって積分を計算し，最終的に

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{m}-E\right)\psi(\boldsymbol{p})+\int U(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\psi(\boldsymbol{q})\frac{d^3q}{(2\pi)^3}=0 \tag{122.18}$$

を得る．これは運動量表示のポジトロニウムのシュレーディンガー方程式である．

もしもわれわれが $\widetilde{\Gamma}$ に対しては図形 (122.2) に限ることにし，そのなかで（また $\mathcal{G}$ のなかで）$1/c$ についての展開のつぎの項を考慮しさえすれば，われわれはブライトの方程式（§83）を得る．（$1/c$ についての展開の高次の項を含めて）(122.4) の図形を計算するとポジトロニウムの準位に対する輻射補正を与える．しかしながら，計算は非常に複雑である．

参考のためにこれらの補正を使った，オルソ－およびパラ－ポジトロニウムの基底準位の差の計算を引用しよう[1]．

$$E(^3S_1)-E(^1S_0)=\alpha^2\frac{me^2}{2\hbar^2}\left\{\frac{7}{6}-\left(\frac{16}{9}+\ln 2\right)\frac{\alpha}{\pi}\right\} \tag{122.19}$$

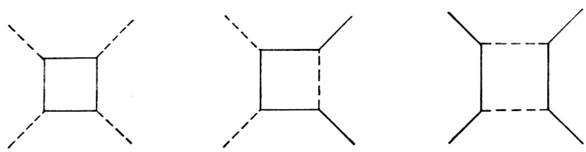
（波括弧内の第 1 項は微細構造の分裂である．§82，問題 2 参照）．準位に対する輻射補正

1) R. Karplus, A. Klein, *Phys. Rev.* **87**, 848 (1952).

は，パラ－ポジトロニウム消滅の確率と同じ程度の大きさであることに注目しよう（(89.4) 参照）．これは，いま考えられている近似では準位 $^1S_0$ は複素数であることを意味している（(122.19) の $E(^1S_0)$ はその実部である）．もちろん，準位が複素数であることは，相応な近似で方程式（122.14）から自動的に得られる．

§123. 2重分散式

4端子ブロックは，複雑さにおいて三つの外線をもつ頂点部につぐものである．量子電気力学ではこれの最も簡単な図形が三つ可能である．

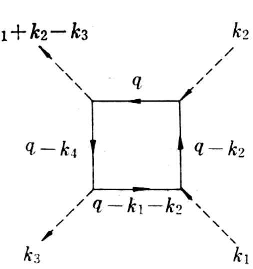


(123.1)

これらのなかの1番目は光子－光子散乱を記述する．残りはそれぞれ，電子による光子散乱（図形 b)）および電子－電子散乱（図形 c)）に対する輻射補正の項を表わしている．

この節はこの種類の図形の二，三の共通な性質を調べることにする．しかし簡単かつ具体的にするために，特定の図形（123.1, a）に適合した記述をすることにしよう．

この図形の運動量をつぎのように置こう．



(123.2)

4－運動量 k_1，k_2，k_3，k_4 は現実の光子に対応する．したがってその平方は0に等しい．

図形（123.2）に対応する振幅 M_{fi} は，光子の偏りへの依存性を分離して，光子の4－運動量のいくつかのスカラー関数を使って表わすことができる．これは §71 で述べた不変振幅である．光子－光子散乱に対してそれを具体的に導くのは次節で行なう．それはスカラーなのでスカラー変数にのみ依存する．この変数として，たとえば，つぎの量のなか

から任意の二つを選ぶことができる．

$$s=(k_1+k_2)^2,\quad t=(k_1-k_3)^2,\quad u=(k_1-k_4)^2,\quad s+t+u=0. \tag{123.3}$$

以下われわれは独立変数として s と t とを選ぼう．

不変振幅はおのおの（ここでは記号 M で表わそう）つぎの形の積分で表わされる．

$$M=\int\frac{iB\,d^4q}{[q^2-m^2][(q-k_4)^2-m^2][(q-k_1-k_2)^2-m^2][(q-k_2)^2-m^2]}, \tag{123.4}$$

$$m^2\to m^2-i0.$$

ここで B はすべての 4－運動量のある関数である．分母の諸因子は四つの仮想的光子の伝播関数から出ている．

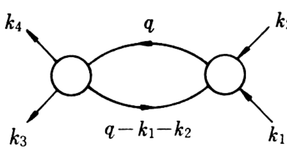
s および t が十分に小さいときは振幅 M は実数である（正確に言えば，位相因子の適当な選択によりそうすることができる）．実際に，s が小さいので s－チャネルでは光子による現実の粒子（電子－陽電子対）の生成ができないことは確かである．また t が小さいので t－チャネルでもできないことは確かである[1]．言いかえれば，両方のチャネルには，ユニタリー条件にしたがって，振幅の虚部を出現させるはずの現実の中間状態がないことになる．

今度は t の値が物理的な（小さい）ときに s を大きくしてみよう．$s\geqslant 4m^2$ で振幅 M に虚部が現われる．これは s－チャネルで 2 光子による対生成が可能なことと結びついている．したがって M に対しては《変数 s についての》分散式を書くことができる．

$$M(s,t)=\frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{A_{1s}(s',t)}{s'-s-i0}\,ds'. \tag{123.5}$$

ここで $A_{1s}(s,t)$ は $M(s,t)$ の虚部を表わしている．

したがって



の形のすべての図形に対して，積分（123.4）のなかで対応する極性因子を規則（112.9）

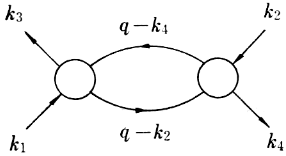
1）図形（123.2）に描かれた外線の向きは s－チャネルに対応している．t－チャネルでは線 1 および 3 が入射線でなければならない．したがって，始めの光子の 4－運動量は k_1 および $-k_3$ になるはずである．光子－光子散乱に対する変数 s, t, u の物理的領域は第 10 図の斜線を施した部分である．したがって，s－チャネルでは $s>0$, $t<0$, $u<0$ の部分に対応する．

にしたがって δ－関数に置き換えることにより $A_{1s}(s,t)$ は計算される．すなわち

$$2iA_{1s}(s,t)=(2\pi i)^2\int\frac{iB\delta(q^2-m^2)\delta[(q-k_1-k_2)^2-m^2]}{[(q-k_4)^2-m^2][(q-k_2)^2-m^2]}d^4q \qquad (123.6)$$

となる．ここで積分は $q^0>0$ であるような q－空間の半分について行なわれる．

積分（123.6）が（その極性因子の意味で）



の型の図形で記述される反応振幅と同じ形の構造をもつことに気付けば，われわれは非常に重要なつぎの一歩を踏み出すことができる．したがって，t の関数としての $A_{1s}(s,t)$ の解析的性質は，この振幅の解析的性質と似ている．特に関数 $A_{1s}(s,t)$ には，分母の二つの因子が同時に 0 になるときにのみ（t を大きくしたとき）虚部が現われることができる．しかしながら，これは $t=4m^2$，すなわち t－チャネルにおける対生成のしきいに達するとすぐに起こるわけではない．それはつぎのような事情によるものである．すなわち，被積分式中の δ－関数の存在は q－空間における積分領域を制限するからである．これは $t=4m^2$ の値とは両立しえない．積分領域の幅は s の値に依存する（δ－関数の引数は k および k_2 を含んでいる）．したがって，境界の値 $t=t_0(s)$ は s に依存する．これを越える $A_{1s}(s,t)$ は複素数になる．

関数 $M(s,t)$ が公式（123.5）によって，その虚部 $A_{1s}(s,t)$ を使って表わされたのとまったく同様に，関数 $A_{1s}(s,t)$ が今度は，《変数 t についての》分散式により，$A_2(s,t)=\mathrm{Im}\,A_{1s}(s,t)$ を使って表わされる．すなわち

$$A_{1s}(s,t)=\frac{1}{\pi}\int_{t_c(s)}^{\infty}\frac{A_2(s,t')}{t'-t-i0}dt'. \qquad (123.7)$$

今ここで（123.7）を（123.5）に代入して，**2 重分散式**あるいは振幅 $M(s,t)$ の**マンデルシュタム表示**を得る．すなわち

$$M(s,t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{4m^2}^{\infty}\int_{t_c(s)}^{\infty}\frac{A_2(s',t')}{(s'-s-i0)(t'-t-i0)}dt'\,ds' \qquad (123.8)$$

である（S. Mandelstam, 1958）．

関数 $A_2(s,t)$ は関数 $M(s,t)$ の **2 変数スペクトル密度**と呼ばれる．これは積分（123.6）から置き換えの規則（112.9）をこれに 2 度繰り返し適用することにより求められる．

簡単のために

$$l_1 = q, \quad l_2 = q - k_4, \quad l_3 = q - k_2, \quad l_4 = q - k_1 - k_2 \tag{123.9}$$

と置き

$$(2i)^2 A_2(s,t) = (2\pi i)^4 \int iB\delta(l_1^2 - m^2)\delta(l_2^2 - m^2)\delta(l_3^2 - m^2)\delta(l_4^2 - m^2)\, d^4 q \tag{123.10}$$

を得る．ここで積分は $q^0 > 0$ の領域で行なわれる．

しかしながら公式 (123.10) はただ記号的な意味しかもたないことを念頭におく必要がある．それは $s > 0$, $t > 0$ の領域が非物理的であるという事情による．したがって，この領域では $l_1, l_2, \cdots$ という量は，一般に q が実数のときには複素数になる．引数が複素数の値のときの δ－関数は完全に定義することはできない．もとの積分 (123.4) の対応する極の留数をとることを直接問題にした方がより正確であろう．しかしながら，われわれの場合には，これは何の役割も果たさない．(123.4) の四つの分母，あるいは δ－関数の四つの引数が0になるという条件は，4－ベクトル q の成分を完全に決定する．$l_1^2, l_2^2, \cdots$ についての積分（下記参照）に移って普通の規則通りに (123.10) を公式的に操作すると，A_2 に対する式が（符号を除いて）求められる．

これから先の計算に対して（s－チャネルで）重心系を選ぼう．このとき

$$k_1 = (\omega, \boldsymbol{k}), \quad k_2 = (\omega, -\boldsymbol{k}), \quad k_3 = (\omega, \boldsymbol{k}'), \quad k_4 = (\omega, -\boldsymbol{k}'), \tag{123.11}$$

$$\begin{aligned} s &= 4\omega^2, \quad t = -(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 = -4\omega^2 \sin^2\frac{\theta}{2}, \\ u &= -(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')^2 = -4\omega^2 \cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{123.12}$$

となる．ここで θ は $\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{k}'$ のあいだの角（散乱角）である．空間デカルト座標の x 軸をベクトル $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}'$ の方向に，y 軸を $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ の方向にとる[1)]．

今度は，平方 $l_1^2, l_2^2, \cdots$ を（q の4成分の代りに）新しい積分変数として選んで，積分 (123.10) を変形しよう．

$$\frac{\partial(l_1^2)}{\partial q^\mu} = 2l_{1\mu}, \cdots$$

が成り立つ．したがって，変換のヤコビアンは

1) $t > 0$ のとき $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 < 0$ である．すなわち，ベクトル $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'$ は虚である．しかしながら，この困難は $t < 0$ のときにすべてのベクトル式を展開し，そのあとで $t > 0$ へ解析接続をすることにより避けることができる．

$$\frac{\partial(l_1^2, l_2^2, l_3^2, l_4^2)}{\partial(q^0, q_x, q_y, q_z)} = 16D$$

となる．ここで D は四つの 4－ベクトル $l_1, l_2, \cdots$ の 16 個の成分からつくられる行列式である．(123.10) のなかの積分は単に被積分式中の関数 B および D を

$$l_1^2 = l_2^2 = l_3^2 = l_4^2 = m^2 \tag{123.13}$$

のときの値に置き換えることに帰してしまう[1]．$l_1^2 = l_4^2 = m^2$ の条件から，§112 と同様に

$$q^0 = \omega, \quad \boldsymbol{q}^2 = \omega^2 - m^2 \tag{123.14}$$

を得る．残りの二つの条件は

$$(q - k_4)^2 - m^2 = -2qk_4 = -2\omega^2 - 2\boldsymbol{qk}' = 0,$$

$$(q - k_2)^2 - m^2 = -2\omega^2 - 2\boldsymbol{qk} = 0$$

となる．したがって

$$\boldsymbol{qk} = \boldsymbol{qk}' = -\frac{s}{4},$$

あるいは，成分に分けて

$$q^0 = \omega, \quad q_x = -\frac{s}{2(s+t)}, \qquad q_y = 0,$$

$$q_z = \pm\sqrt{\omega^2 - m^2 - q_x^2} = \pm\left[\frac{st - 4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^{1/2} \tag{123.15}$$

となる．

このようにして，積分 (123.10) は

$$A_2(s,t) = \frac{\pi^4}{4D}\sum(-iB) \tag{123.16}$$

に等しい．ここで和は (123.15) の $\boldsymbol{q}$ の二つの値について行なわれる．

行列式 D は単位反対称テンソルを使って書くことができる．すなわち

$$D = e_{\mu\nu\rho\sigma} l_1^\mu l_2^\nu l_3^\rho l_4^\sigma = -e_{\mu\nu\rho\sigma} q^\mu k_4^\nu k_2^\rho k_1^\sigma$$

$$= -e_{\mu\nu\rho\sigma}(q - k_1)^\mu (k_4 - k_1)^\nu (k_2 - k_1)^\rho k_1^\sigma$$

である（変換に際して $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ の反対称性が用いられた）．四つの因子中 k_1 だけが時間成分をもつことに気づくと

$$D = -\omega\boldsymbol{q}[(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')]$$

---

1) この積分法は自動的に，δ－関数の引数の零点の一つについてだけ考慮することになる．

が得られる．この式を $t<0$ のときに展開し，そのあとで $t>0$ に接続すると

$$D=-\omega q_z\sqrt{s+t}\sqrt{-t}\longrightarrow\pm\frac{i}{4}\{st[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}\qquad(123.17)$$

を得る．

この式の符号の選択が必要だが，それはつぎのような考察に基づいて決められる．簡単のために $B=1$ と置こう．このとき，物理的領域 $(s>0,\ t<0)$ では $A_{1s}(s,t)<0$ が成り立つ．実際に，(123.6) のなかの被積分式は同じ（負の）符号をもっている．すなわち

$$(q-k_4)^2-m^2=-2\omega^2-2\boldsymbol{qk}'<-2\omega(\omega-|\boldsymbol{q}|)<0,$$
$$(q-k_2)^2-m^2=-2\omega^2-2\boldsymbol{qk}<-2\omega(\omega-|\boldsymbol{q}|)<0$$

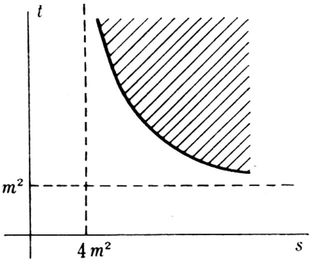
である（ここでは，分子に二つの δ-関数があるので，(123.14) が成り立ち，したがって $|\boldsymbol{q}|<\omega$ であることが使われた)[1]．このとき (123.7) から $s>0$, $t>0$ のとき関数 $A_2(s,t)$ が（もしも (123.16) からわかるように，この関数が定符号であることを考慮すれば）負でなければならないことがわかる．これは (123.17) が上記の符号をとる必要があることを意味している．したがって，最終的には

$$A_2=-\pi^4\frac{\sum B}{\{st[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}}\qquad(123.18)$$

となる．

関数 $A_2(s,t)$ はそれ自身の意味からは実数でなければならないので，s および t が正であることのほかに，まだ分母の角括弧内の式が正という条件がある．すなわち

$$st-4m^2(s+t)\geqslant 0,\quad s>0,\quad t>0\qquad(123.19)$$



第 22 図

である．これらの不等式は 2 重分散積分 (123.8) で積分が行なわれるべき領域（第 22 図の斜線を施した部分）を決定する．これの境界は曲線

$$st-4m^2(s+t)=0$$

であり，漸近線は $s=4m^2$ および $t=4m^2$ である．

1)　もちろん，これは偶然ではない．A_{1s} が負であることは，実際にはユニタリー条件からきている．これは $t=0$ のときに特にはっきりしている．そこでは A_{1s} は全断面積を与える．

(123.5) および (123.8) の形の分散式はまだくりこみの条件を考慮していない．そして文字通りにそれを適用すると積分は発散し，正則化を要求するはずである．振幅 $M(s,t)$ に対するくりこみ条件は

$$M(0,0)=0 \tag{123.20}$$

という要求にまとめられる．事実，光子－光子散乱の振幅は $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ (したがって $s=t=0$) のときに0になる．なぜかというと，$k=0$ は時間および空間に対して定数のポテンシャルを意味し，どんな物理的な場もこれには対応しない (われわれは次節でまた立ち返ってこの条件を詳しく調べよう)．

自動的にこの条件を考慮に入れるためには，((108.8) から (108.13) への移行に似た)《差し引きをした》分散式を書く必要がある．われわれは，つぎのようにして自然にこの式に到達する．それには初めに恒等式

$$\frac{1}{(s'-s)(t'-t)}=\frac{st}{(s'-s)(t'-t)\,s't'}+\frac{s}{(s'-s)\,s't'}+\frac{t}{(t'-t)\,s't'}+\frac{1}{s't'}$$

を使って，関係式 (123.8) の恒等変換を行なう．これを (123.8) の被積分式に代入して

$$M(s,t)=\frac{st}{\pi^2}\iint\frac{A_2(s',t')\,ds'\,dt'}{(s'-s)(t'-t)\,s't'}$$
$$+\frac{s}{\pi}\int\frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)\,s'}+\frac{t}{\pi}\int\frac{g(t')\,dt'}{(t'-t)\,t'}+C$$

を得る．ここで

$$f(s)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A_2(s,t')}{t'}\,dt',\quad g(t)=\frac{1}{\pi}\int\frac{A_2(s',t)}{s'}\,ds',$$
$$C=\frac{1}{\pi^2}\iint\frac{A_2(s',t')}{s't'}\,ds'\,dt'$$

である．

最後の等式は，しかしながら，すべての積分が収束するという条件のときにのみ意味があるはずである．そうでない場合には，関数 $f(s)$，$g(t)$ および定数 C は，くりこみの条件に対応する与えられた値をあらかじめ決めておかなければならない．すなわち

$$C=0,\quad f(s)=A_{1s}(s,0),\quad g(t)=A_{1t}(0,t)$$

と置く必要がある (ここで A_{1t} は $M(s,t)$ の虚部で，s が小さい値のときに t を大きくすると現われる．まったく同様に A_{1s} は t が小さいときに s を大きくすると現われる虚部である)．これらの等式中の1番目は明らかである．すなわち，$C=M(0,0)=0$ である．2番目 (および同様に3番目) は，等式

$$M(s,0) = \frac{s}{\pi}\int \frac{f(s')\,ds'}{(s'-s)\,s'}$$

を

$$M(s,t) = \frac{s}{\pi}\int \frac{A_{1s}(s',t)}{(s'-s)\,s'}\,ds' \qquad (123.21)$$

とくらべることにより出てくる．この式は1重分散式（123.5）から条件（123.20）に対応する《差し引きをして》書かれたものである．

このようにして，最終的な《差し引きをした》2重分散式はつぎのようになる．

$$M(s,t) = \frac{st}{\pi^2}\iint \frac{A_2(s',t')}{(s'-s)(t'-t)\,s't'}\,ds'\,dt'$$
$$+\frac{s}{\pi}\int \frac{A_{1s}(s',0)}{(s'-s)\,s'}\,ds' + \frac{t}{\pi}\int \frac{A_{1t}(0,t')}{(t'-t)\,t'}\,dt'. \qquad (123.22)$$

もしも s，t 自体が積分領域内にあれば，積分（123.21），（123.22）はいつも

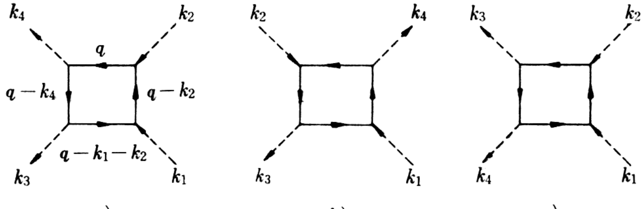
$$s \to s + i0, \quad t \to t + i0 \qquad (123.23)$$

の極限と考える必要がある．

§124. 光子－光子散乱

（真空中の）光の光による散乱は量子電気力学に特徴的な過程である．古典電気力学ではマクスウェル方程式が線形であるために，これは存在しない[1]．

量子電磁力学で光子－光子散乱は，始めの2光子による仮想的な電子－陽電子対の生成と，それにつづく終りの光子を出す対消滅の結果として記述される．この過程は（最初の0でない近似で），四つの端のあらゆる可能な配置をもつ一つの《4角形の》図形で記述される．ここにこれらの図形を列挙しよう．



(124.1)

1）この過程は，振動数の小さい場合に最初にオイラー（H. Euler, 1936）により，また超相対論的場合にはアヒーゼル（1937）により考察された．問題の完全な解はカープラスおよびノイマン（R. Karplus, M. Neumann, 1951）により与えられた．

および，電子環を回る向きを変える点だけが違っているあと三つの図形とである．後者の寄与は図形（124.1）の寄与と一致する．したがって全散乱振幅は

$$M_{fi} = 2(M^{(a)} + M^{(b)} + M^{(c)}) \tag{124.2}$$

である．ここで $M^{(a)}$，$M^{(b)}$，$M^{(c)}$ は図形 a)，b)，c）の寄与である．

（65.19）にしたがって，散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2\frac{do'}{(2\omega)^2} \tag{124.3}$$

である．ここで do' は重心系での $\boldsymbol{k}'$ の方向の立体角要素である．

A. 不変振幅

四つの光子の偏りの因子を分離して，M_{fi} を

$$M_{fi} = e_1^\lambda e_2^\mu e_3^{\nu *} e_4^{\rho *} M_{\lambda\mu\nu\rho} \tag{124.4}$$

の形に表わそう．4－テンソル $M_{\lambda\mu\nu\rho}$（これを光子－光子散乱テンソルと呼ぶ）はすべての光子の 4－運動量の関数である．もしも関数の引数に，図形の外端が同じ方向になるような符号を付けると，図形（124.1）の総和の対称性から，テンソル

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(k_1, k_2, -k_3, -k_4)$$

は四つの添字の互換と同時に行なう四つの引数の任意の互換に関して対称である．グラディエント不変性のために，置き換え $e \to e + \mathrm{const}\cdot k$ に際して，振幅（124.4）は不変でなければならない．言いかえれば

$$k_1^\lambda M_{\lambda\mu\nu\rho} = k_2^\mu M_{\lambda\mu\nu\rho} = \cdots = 0 \tag{124.5}$$

でなければならない．

容易にわかるように，これから特に，散乱テンソルの $k_1, k_2, \cdots$ についての展開はこれらの成分 4 個の積を含む項から始まることが出てくる．したがっていつでも

$$M_{\lambda\mu\nu\rho}(0,0,0,0) = 0 \tag{124.6}$$

である．

不変振幅を具体的につくるためには，しかしながら，はじめから偏りの 4－ベクトルに決まったゲージを選んでおいた方が目的にかなっている．それは

$$e_1^\mu = (0, \boldsymbol{e}_1), \quad e_2^\mu = (0, \boldsymbol{e}_2), \cdots \tag{124.7}$$

であるようなゲージである．このとき

$$M_{fi} = M_{iklm} e_{1i} e_{2k} e_{3l}^* e_{4m}^* \tag{124.8}$$

である．ここで M_{iklm} は 3 次元テンソルである．

独立な偏りの方向として，各光子対に対して3次元の偏りの基底 $e^{(1)}, e^{(2)}$ を導入する．これはつぎのように選ばれる．

$$e_1^{(1)} = e_2^{(1)} = e_3^{(1)} = e_4^{(1)} = \frac{[kk']}{|[kk']|}, \quad e_1^{(2)} = \frac{1}{\omega}[ke_1^{(1)}] = -e_2^{(2)},$$
$$e_3^{(2)} = \frac{1}{\omega}[k'e_3^{(1)}] = -e_4^{(2)}. \tag{124.9}$$

こうするとテンソル M_{iklm} は

$$M_{iklm} = \sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} e_{1i}^{(\lambda_1)} e_{2k}^{(\lambda_2)} e_{3l}^{(\lambda_3)} e_{4m}^{(\lambda_4)} \tag{124.10}$$

の形に書くことができる．16個の量 $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ は s，t，u の関数であり，不変振幅の役割を果たしている．しかしながらこれらすべてが独立ではない．

まず第一に，$e^{(1)}$ が軸性，$e^{(2)}$ が極性ベクトルであることを指摘しよう．M_{iklm} が3次元の真正テンソルであり，また $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ が真正スカラーであるから，P－不変性の要求から，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ の組では添字1および2について偶数個ずつなければならない．さらに振幅 M_{fi} は始めおよび終りの2光子の互換に対して不変でなければならない．もしも二つの互換（$k_1 \leftrightarrow k_2$，$k_3 \leftrightarrow k_4$）を一緒に行なえば，変数 s，t，u は変わらないで，偏りの添字の互換は関係式 $M_{1212} = M_{2121}$，$M_{1221} = M_{2112}$ へと導く．

最後に，時間の向きを換えるときは，置き換え

$$k \leftrightarrow -k', \quad e_1, e_2 \leftrightarrow -e_3^*, -e_4^*$$

を意味している（(71.14)，(71.15) 参照）．このとき基底（124.9）はつぎの式にしたがって変換される．

$$e_1^{(1)}, e_2^{(1)} \leftrightarrow -e_3^{(1)}, -e_4^{(1)}, \quad e_1^{(2)}, e_2^{(2)} \leftrightarrow e_3^{(2)}, e_4^{(2)}.$$

散乱振幅 M_{fi} の T－不変性の条件は，したがって，さらに等式 $M_{1122} = M_{2211}$ へと導いている．

このようにして，合計8個の0と異なる不変振幅があり，そのなかの五つが独立である．すなわち

$$M_{1111}, \quad M_{2222}, \quad M_{1122} = M_{2211}, \quad M_{1212} = M_{2121}, \quad M_{1221} = M_{2112} \tag{124.11}$$

である．

もしも（124.3）のなかで，M_{fi} の代りに振幅 $M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ のなかの一つを代入すると，始めと終りの光子の偏りが与えられているときの散乱断面積を得る．終りの偏りについて加え合わされ，始めの偏りについて平均された断面積は，置き換え

$$|M_{fi}|^2 \to \frac{1}{4}\{|M_{1111}|^2+|M_{2222}|^2+2|M_{1212}|^2+2|M_{1221}|^2+2|M_{1122}|^2\} \quad (124.12)$$

により得られる．

対称関係式（124.11）は同一変数の関数として，異なる不変振幅どうしを結びつけている．振幅 M_{fi} がすべてのチャネルで同一の反応（2光子の散乱）を記述し，したがって一つのチャネルから他のチャネルに移っても不変でなければならないことを考慮すれば，交叉不変性（§79）の結果として，これ以上の関数関係式が生じてくる．

（図形（124.1）の矢印の向きに対応する）s－チャネルから t－チャネルへの移行は，すべての変数（運動量および偏り）で添字2と3との互換を起こさせる．すなわち，散乱テンソルで置き換え $s\leftrightarrow t$ および 添字 λ_2 と λ_3 の互換である．また，s－チャネルから u－チャネルへの移行は（$s\leftrightarrow u$ のとき）添字2と4の同様な互換を起こさせる．そうしてこれから等式

$$\begin{aligned}
&M_{1111}(s,t,u)=M_{1111}(t,s,u)=M_{1111}(u,t,s),\\
&M_{2222}(s,t,u)=M_{2222}(t,s,u)=M_{2222}(u,t,s),\\
&M_{1122}(s,t,u)=M_{1221}(u,t,s)=M_{1212}(t,s,u),\\
&M_{1221}(s,t,u)=M_{1221}(t,s,u),\\
&M_{1212}(s,t,u)=M_{1212}(u,t,s),\\
&M_{1122}(s,t,u)=M_{1122}(s,u,t).
\end{aligned} \quad (124.13)$$

が見いだされる[1]．

このようにして，実際には全部で三つの不変振幅，たとえば M_{1111}，M_{2222} と M_{1122} を計算すれば十分である．

関係式（124.13）は，三つの図形（124.1）のすべての寄与を加えた，全振幅に対して成立する．しかもこれらの寄与そのものは，図形をくらべれば明らかな関係式によって互いに結びつけられている．たとえば，図形 b）は置き換え $k_2\leftrightarrow -k_4$，$e_2\leftrightarrow e_4^*$ によって a）から求められる．したがって，その不変振幅中の寄与は，変数の置き換え $s\leftrightarrow u$ と添字の置き換え $\lambda_2\leftrightarrow\lambda_4$ によって互いに求めることができる．同様に図形 c）の寄与は置き換え $t\leftrightarrow u$，$\lambda_3\leftrightarrow\lambda_4$ によって a）から求められる．したがって

1）三つの変数 s, t, u は独立でないので，すべての関数のなかで二つの引数（たとえばはじめの二つ）を書けば十分であるはずである．ここでは三つの変数をすべて残すことにする．これはその互換対称性を一層あらわに表わすためである．

$$\frac{1}{2}M_{1111}(s,t,u) = M^{(a)}_{1111}(s,t,u) + M^{(a)}_{1111}(u,t,s) + M^{(a)}_{1111}(s,u,t),$$
$$\frac{1}{2}M_{2222}(s,t,u) = M^{(a)}_{2222}(s,t,u) + M^{(a)}_{2222}(u,t,s) + M^{(a)}_{2222}(s,u,t), \quad (124.14)$$
$$\frac{1}{2}M_{1122}(s,t,u) = M^{(a)}_{1122}(s,t,u) + M^{(a)}_{1221}(u,t,s) + M^{(a)}_{1122}(s,u,t)$$

となる．このようにして，四つの振幅 $M^{(a)}_{1111}$, $M^{(a)}_{2222}$, $M^{(a)}_{1221}$, $M^{(a)}_{1122}$ のなかの一つの図形からの寄与だけを計算すれば十分である．これらの関数のなかの初めの三つはさらに s と t に関して対称である．それは図形 a) の形からも明らかである（端 k_2 と k_3 の互換に関して対称である）．

B. 振幅の計算

図形（124.1, a）に対応する積分 $M^{(a)}_{fi}$ は（123.4）の形になる．このとき

$$B^{(a)} = \frac{e^4}{\pi^2}\mathrm{Sp}\,\{\hat{e}_1(\hat{q}-\hat{k}_2+m)\hat{e}_2(\hat{q}+m)\hat{e}_4^*(\hat{q}-\hat{k}_4+m)\hat{e}_3^*(\hat{q}-\hat{k}_1-\hat{k}_2+m)\} \quad (124.15)$$

である．$e=(0,\boldsymbol{e})$ のなかの $\boldsymbol{e}$ として $\boldsymbol{e}^{(\lambda)}$ (124.9) を選んだ上記の式の値を $B^{(a)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ としよう．このような B をもつ積分（123.4）は $M^{(a)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ である．

積分（123.4）は対数的に発散する．条件（124.6）に対応して，これの正則化は $k_1 = k_2 = \cdots = 0$ のときの値を引くことによって実現される[1]．しかしながら，正則化された積分の計算は非常に膨大なものである．

光子－光子散乱の振幅を計算するための最も自然な方法は，2重分散式の使用に基づいたものである (B. de Tollis, 1964)．この方法は最も完全なやり方で，図形の対称性を考慮して，ほとんど完全に積分の困難を取り除いている．振幅 M_{1111} を例にとり，計算の過程を説明しよう．

---

1) すべての図形の寄与を加えるとき，積分の発散部分は互いに打ち消しあうことを指摘しよう．積分の（$q\to\infty$ のときの）漸近形が

$$M^{(a)}_{\lambda\mu\nu\rho} \sim \int \mathrm{Sp}\,(\gamma_\nu\hat{q}\gamma_\rho\hat{q}\gamma_\mu\hat{q}\gamma_\lambda\hat{q})\frac{d^4q}{(q^2)^4}$$

であることに気がつけば，これは容易に確かめられる．q の方向についての平均（(127.10) 参照）のあとで，跡は容易に計算され

$$M^{(a)}_{\lambda\mu\nu\rho} \sim (g_{\lambda\mu}g_{\nu\rho} + g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho} - 2g_{\lambda\rho}g_{\mu\nu})\int\frac{d^4q}{(q^2)^2}$$

となる．図形についての和は，この式を添字 λ, μ, ν, ρ について加え合わせることを意味している．その結果これは0になる．しかしながら，この打ち消しはある意味で偶然的性質をもつもので，正則化の必要性をなくするものではない．たとえこのとき正則化が有限の量の引き算になったとしてもそうである．

関数 $A_{1s}^{(a)}(s,t)$ は (123.6) にしたがって計算される．積分のなかに二つの δ－関数があるので，ただ

$$l_1{}^2 = q^2 = m^2, \quad l_4{}^2 = (q - k_1 - k_2)^2 = m^2 \tag{124.16}$$

のときの B の値だけが必要になる．このとき標準的な規則にしたがって計算するとつぎのようになる．

$$B_{1111}^{(a)} = \frac{4e^4}{\pi^2}\left\{8(e^{(1)}q)^4 - \left[4(e^{(1)}q)^2 + \frac{s}{2}\right](k_2q + k_4q) + 2(k_2q)(k_4q) - \frac{st}{4}\right\}. \tag{124.17}$$

((123.22) に代入するためには) ただ $t = 0$ のときの A_{1s} の値だけが必要である．こう置くことは $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ および $k_2 = k_4$ を意味する．このとき積分 (123.6) はつぎの形になる．

$$[A_{1s}^{(a)}(s,0)]_{1111} = -\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{s-4m^2}{s}}\int\frac{B_{1111}^{(a)}\,do_{\boldsymbol{q}}}{[(q-k_2)^2 - m^2]^2} \tag{124.18}$$

((112.10) の導き方参照)．$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{k}$ のあいだの角 ϑ，および $\boldsymbol{e}^{(1)}$ とベクトル $\boldsymbol{k}$ に垂直な面への $\boldsymbol{q}$ の投影とのあいだの角 φ を導入して ($t = 0$ のときに)

$$qk_2 = qk_4 = \omega(\omega - |\boldsymbol{q}|\cos\vartheta), \quad qe^{(1)} = -|\boldsymbol{q}|\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$(q-k_2)^2 - m^2 = -2\omega(\omega - |\boldsymbol{q}|\cos\vartheta)$$

を得る．(124.17)，(124.18) に代入したのち，$do_{\boldsymbol{q}} = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ についての積分は初歩的に行なわれ，結果として

$$[A_{1s}^{(a)}(s,0)]_{1111} = -4\pi e^4\left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{16m^2}{s}\right)\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} - \left(1 + \frac{8m^2}{s}\right)\mathrm{Arch}\frac{\sqrt{s}}{2m}\right] \tag{124.19}$$

を与える．

関数 $[A_{1t}^{(a)}(0,t)]_{1111}$ は $M_{1111}^{(a)}$ の対称性のために，(124.19) とはただ置き換え $s \to t$ だけが異なっている．

関数 $A_2^{(a)}(s,t)$ を (123.18) にしたがって計算するためには，(124.16) のほかに，条件 $(q-k_2)^2 = m^2$，$(q-k_4)^2 = m^2$ もまた満足するような (123.15) の値のときの $B^{(a)}$ の値が要求される．このとき

$$k_2q = k_4q = 0, \quad (e^{(1)}q)^2 = q_z^2 = \frac{st - 4m^2(s+t)}{s+t}$$

である．(124.17) に代入し，つづいて (124.17) を (123.18) に代入して

$$[A_2^{(a)}(s,t)]_{1111} = 8\pi^2 e^4 \frac{\dfrac{st}{4} - 8\left[\dfrac{st-4m^2(s+t)}{4(s+t)}\right]^2}{\{st[st-4m^2(s+t)]\}^{1/2}} \tag{124.20}$$

となる．

関数 A_{1s}，A_{1t}，A_2 を計算したあと，分散式 (123.22) は振幅 M を直接に，1重あるいは2重の定積分として与える．ここで参考のために四つの振幅 $M^{(a)}$ に対する最終的な結果を書こう．これらは (124.14) にしたがえば散乱振幅の完全な計算に十分である[1]．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\alpha^2}M^{(a)}_{1111}(s,t) &= \frac{1}{3} + \frac{s-t}{s+t}[B(s)-B(t)] \\
&\quad - \left\{1 - 4\frac{t-2s}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(s) - \left\{1 - 4\frac{s-2t}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(t) \\
&\quad + \left\{1 - \frac{2}{st}\left(4 - \frac{st}{s+t}\right)^2\right\}I(s,t), \\
\frac{1}{4\alpha^2}M^{(a)}_{2222}(s,t) &= -1 + \frac{s-t}{s+t}[B(s)-B(t)] \\
&\quad - \left\{1 + \frac{4t}{s(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(s) - \left\{1 + \frac{4s}{t(s+t)} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}T(t) \\
&\quad + \left\{1 - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}I(s,t), \qquad (124.21) \\
\frac{1}{4\alpha^2}M^{(a)}_{1122}(s,t) &= -\frac{5}{9} + \frac{s-t}{s+t}B(s) + \left\{\frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t}\right\}B(t) \\
&\quad - \left\{1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}[T(s)+T(t)] \\
&\quad + \left\{1 - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}I(s,t), \\
\frac{1}{4\alpha^2}M^{(a)}_{1221}(s,t) &= \frac{1}{9} - \left\{\frac{5}{3} + \frac{16}{3s} - \frac{2t}{s+t}\right\}B(s) - \left\{\frac{5}{3} + \frac{16}{3t} - \frac{2s}{s+t}\right\}B(t) \\
&\quad + \left\{1 + \frac{4}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}[T(s)+T(t)] \\
&\quad - \left\{1 - \frac{4}{s} - \frac{4}{t} + \frac{8}{s+t} - \frac{2st}{(s+t)^2}\right\}I(s,t).
\end{aligned}$$

ここで $B(s)$，$T(s)$，$I(s,t)$ はつぎの関数を表わしている．

1) 積分の変換の詳細，超越関数 B, T, I のいろいろな表わし方，および極限の式については B. de Tollis, *Nuovo Cimento*, **32**, 757 (1964); **35**, 1182 (1965) 参照．

$$B(s) = \begin{cases} \sqrt{1-\frac{4}{s}}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{-s}}{2} - 1 & (s<0) \\ \sqrt{\frac{4}{s}-1}\,\arcsin\frac{\sqrt{s}}{2} - 1 & (0<s<4) \\ \sqrt{1-\frac{4}{s}}\,\mathrm{Arch}\,\frac{\sqrt{s}}{2} - 1 - \frac{i\pi}{2}\sqrt{1-\frac{4}{s}} & (4<s), \end{cases}$$

$$T(s) = \begin{cases} \left(\mathrm{Arsh}\frac{\sqrt{-s}}{2}\right)^2 & (s<0) \\ -\left(\arcsin\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 & (0<s<4) \\ \left(\mathrm{Arch}\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi\,\mathrm{Arch}\frac{\sqrt{s}}{2} & (4<s), \end{cases} \qquad (124.22)$$

$$I(s,t) = I(t,s)$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dy}{y(1-y)-\frac{s+t}{st}}\{\ln[1-i0-sy(1-y)] + \ln[1-i0-ty(1-y)]\}$$

(簡単のために公式（124.21），（124.22）では，このなかだけだが記号 s および t は比 s/m^2，t/m^2 を表わしている）．

C. 散乱断面積

振動数の小さい極限の場合 ($\omega \ll m$) は，小さい変数値 s，t，u に対応する．不変振幅の展開の第１項はこれらの変数を使って

$$M_{1111} = M_{2222} = \frac{4e^4}{45m^4}(s^2+t^2+u^2),$$
$$M_{1122} = \frac{e^4}{45m^4}(-4s^2+7t^2+7u^2) \qquad (124.23)$$

である．これらの振幅を使って偏りのない光子の散乱微分断面積は（普通の単位で）

$$d\sigma = \frac{139}{4\pi^2(90)^2}\alpha^2 r_e^2\left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6(3+\cos^2\theta)^2\,do' \qquad (124.24)$$

となり，全断面積は[1)]

$$\sigma = \frac{973}{10125\pi}\alpha^2 r_e^2\left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6 = 0.030\alpha^2 r_e^2\left(\frac{\omega}{mc^2}\right)^6 \qquad (\hbar\omega \ll mc^2) \qquad (124.25)$$

となる．

逆に超相対論的場合には，偏りのない光子の全散乱断面積は

---

1)　$d\sigma$ から σ に移るためには，二つの光子端が同じであることを考慮して 1/2 を掛ける必要がある．

$$\sigma = 4.7\alpha^4 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \qquad (\hbar\omega \gg mc^2) \tag{124.26}$$

である．この断面積の振動数依存性は次元の考察からも予測できる．すなわち，$\hbar\omega \gg mc^2$ のとき全断面積は m に依存してはいけない．このとき α^4c^2/ω^2 が必要な次元をもち e^8 に比例する唯一の式である．(124.26) の係数は数値計算の結果である．

最後に，超相対論的場合の小さい角度の散乱の微分断面積を示そう．

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2\omega^2} \ln^4 \frac{1}{\theta}\, do \qquad \left(\frac{m}{\omega} \ll \theta \ll 1\right) \tag{124.27}$$

である．この式は対数的精度で正しい．展開のつぎの項は大きい対数項の一つだけ小さい乗冪を含んでいる．$\theta = 0$ の極限（前方散乱）へ移るために，公式 (124.27) は不適当である．ここではこの代りに

$$d\sigma = \frac{\alpha^4}{\pi^2\omega^2} \ln^4 \frac{\omega}{m}\, do \qquad \left(\theta \ll \frac{m}{\omega}\right) \tag{124.28}$$

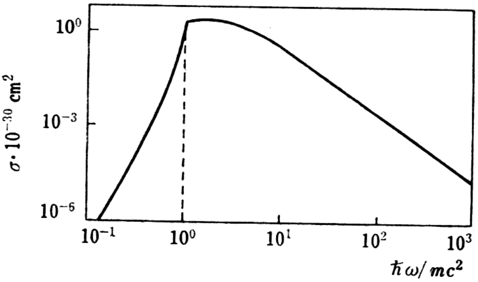
が成り立つ．この式は一般式 (124.21) を使って容易に求めることができる．すなわち，その式のなかで $t = 0$ と置き，$s \gg 1$ のときには大きい対数の最高次（2次）の乗冪を含んでいるのが，関数

$$T\left(\frac{s}{m^2}\right) \approx \frac{1}{4} \ln^2 \frac{s}{m^2} \approx \ln^2 \frac{\omega}{m}$$

だけであることに気付けばよい．この精度で，0 と異なるのは振幅

$$M_{1111} = M_{2222} = M_{1212} = -16e^4 \ln^2 \frac{\omega}{m}$$

だけである．これは，この場合には特に光子の偏りが散乱の際に変わらないことを意味している．



第 23 図

第23図には全散乱断面積の振動数依存性の図が描かれている（両軸とも対数目盛である）．断面積は振動数の大きい側にも小さい側にも減少し，$\omega \approx 1.5\,m$ で極大に達する．$\omega = m$ での曲線の屈折は，現実の電子対生成の可能性と関連した過程の特性の変化を反映している．

D. 小さい振動数の場合

振動数が小さい（$\omega \ll m$）の場合に，光子－光子散乱の振幅は，自由電磁場のラグランジュ関数（下記 §126 参照）の補正項から出発するまったく別の方法でも求めることができる．

相互作用のハミルトニアンに対する小さい補正 V′ はラグランジアンに対する小さい補正と符号だけが異なっている．(126.19) にしたがって

$$\mathrm{V}' = -\frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}\int\{(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)^2+7(\mathbf{EH})^2\}\,d^3x \tag{124.29}$$

である．この演算子は場の強さについて4次であるから，1次近似ですでにわれわれに興味のある遷移に対する行列要素をもっている．

計算のために (124.29) に

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A} = \sqrt{4\pi}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}(\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\lambda}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}e^{-ikx}+\mathrm{c}^+_{\boldsymbol{k}\lambda}\boldsymbol{e}^*_{\boldsymbol{k}\lambda}e^{ikx}) \tag{124.30}$$

を代入する必要がある（λ は偏りの番号である）．このあとで S－行列はつぎのように計算される．

$$S_{fi} = -i\left\langle f\left|\int \mathrm{V}'\,dt\right|i\right\rangle$$
$$= -i\left\langle 0\left|\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}_3\lambda_3}\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}_4\lambda_4}\int \mathrm{V}'\,dt\,\mathrm{c}^+_{\boldsymbol{k}_1\lambda_1}\mathrm{c}^+_{\boldsymbol{k}_2\lambda_2}\right|0\right\rangle \tag{124.31}$$

（§§73，78参照）．**A** の規格化のために (124.30) のなかのように，振幅 M_{fi} は直接 S_{fi} から

$$S_{fi} = i(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_3+k_4-k_1-k_2)M_{fi} \tag{124.32}$$

にしたがって決定される（§65参照）．(124.31) の平均値は (78.3) を使ってヴィックの定理から計算される．このとき，もちろん，《外部の》演算子 $\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\lambda}$，$\mathrm{c}_{\boldsymbol{k}\lambda}^{+}$ と内部の **A** とだけを縮約する必要がある．

参考のために，光子の偏りと方向を使ってあらわな形に表わされた散乱振幅を示そう．

$$M_{fi}=\frac{4}{45}\frac{\alpha^2\omega^4}{m^4}(7R-10S), \tag{124.33}$$

$$R=P(1234)+P(1324)+P(1432),$$

$$S=Q(1234)+Q(1324)+Q(1432),$$

$$\begin{aligned}P(1234)=&(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)\\
&-(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)\{(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4)[(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_1)+(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)]-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)\\
&-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_1)-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_2)-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)\}\\
&-(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)\{(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)[(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_3)+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_4)]-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)\\
&-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_3)-(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)-(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_4)\}\\
&+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)[(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_4)(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_3)+(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_3)(1-\boldsymbol{n}_2\boldsymbol{n}_4)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q(1234)=&(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)+(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_4\boldsymbol{n}_3)\\
&+(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{n}_2)(\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_1)+(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_4)(1-\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2)(1-\boldsymbol{n}_3\boldsymbol{n}_4).\end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}_3=-\boldsymbol{n}_4=\boldsymbol{n}'$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$, $\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{k}'/\omega$ である．

§125. 核の電場内の光子の干渉性散乱

動かない原子核によりつくられる定電場内での光子の干渉性（弾性）散乱は，（光子－光子散乱とならぶ）今一つの非線形効果である．この過程は同じ4角形の図形（124.1）によって記述される．しかしながら，こんどは光子線中の二つが外場によって置き換えられる[1)]．この過程の徹底的な研究は今までのところ行なわれていない．したがってわれわれは，ここでは若干の定性的な評価だけに限ることにしよう．

ゲージ不変性の要求から，$\omega\to 0$ のとき散乱振幅は始めの光子（k）と終りの光子（k'）の4－運動量の積を含む必要がある（光子－光子散乱の振幅の展開が，全光子の4－運動量4個の積から始まったのに似ている）．言いかえれば，小さい振動数の光子の散乱振幅は ω^2 に比例することになる．またこの振幅が外場（電荷 Ze をもつ原子核の場）を2次で含むことを考慮して，散乱断面積が

$$d\sigma\sim Z^4\alpha^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^4 do \qquad (\omega\ll m) \tag{125.1}$$

になることが結論される．もちろん，振動数依存性は §60 の一般的結論に対応してい

1) 一つの仮想的光子外線と三つの現実の光子外線をもつ図形は，一つの光子が外場内で二つの光子に崩壊する過程に対応する（また逆過程は2光子の1光子への《融合》である）．

る[1].

高振動数のときの断面積の評価に対しては，光学定理（§72）が使われる．ユニタリー関係式の右辺に現われる中間状態は，この場合には電子－陽電子対である（光子端のあいだの二つの電子内線での切断がこれに対応する）．したがって，光学定理は角度0の光子の弾性散乱振幅と，核の電場での光子の対生成の全断面積 $\sigma_{対}$ とを結びつけている．角度 θ の散乱の振幅 $f(\omega,\theta)$ を，散乱断面積が $d\sigma=|f|^2do$ になるように決めて（(72.5)参照）

$$\mathrm{Im}\, f(\omega,0)=\frac{\omega}{4\pi}\sigma_{対}$$

を得る．もちろん，断面積 $\sigma_{対}$ は $\omega>2m$ のときにのみ0と異なる．超相対論的場合には $\sigma_{対}$ を（92.8）からもってきて，対数的精度に限ると

$$\mathrm{Im}\, f(\omega,0)=\frac{7}{9\pi}(Z\alpha)^2 r_e\frac{\omega}{m}\ln\frac{\omega}{m} \qquad (\omega\ll m) \tag{125.2}$$

を得る．

散乱振幅の虚部から分散式を使って実部を決定することができる．このとき，振動数についての分散積分のなかで，振動数 $\omega\sim m$ の領域が重要であることがわかる．ここでは $\mathrm{Im}\, f(\omega,0)$ のなかの大きい対数が消えてしまう．したがって，同じ対数的精度では，振幅の実部は虚部とくらべて無視することができる（$\omega\gg m$ のとき）．そして角度0の散乱断面積に対して

$$d\sigma|_{\theta=0}=\frac{49}{81\pi^2}(Z\alpha)^4 r_e^2\left(\frac{\omega}{m}\right)^2\ln^2\frac{\omega}{m}\,do \qquad (\omega\gg m) \tag{125.3}$$

を得る（F. Rohrlich, R. L. Gluckstern, 1952）．

ここで使われた光子による対生成の断面積の対数項は，非常に小さい角度の領域に由来している．このような領域（$\theta\lesssim(m/\omega)^2$）にだけ公式（125.3）を適用することができる．この領域は，したがって全散乱断面積のなかでは非常に小さい寄与をする．全散乱断面積に対しては（対生成の過程と同様に）$\theta\lesssim m/\omega$ の角度領域が主要な寄与をする．このことは，光子散乱と光子による対生成の振幅を互いに結びつけ，一般的（角度が0でない）ユニタリー関係式を基にして容易に理解することができる．しかしながら，この領域では対

1）（125.1）のなかの係数は，§126で見いだされる一様な電磁場のラグランジュ関数を使って計算してはいけない（光による光の散乱に対してはこうすることができたが）．この原因はまとめるとつぎのようになる．今の場合には，核からの距離が $r\sim 1/m$ のところが重要であり，ここでは核の電場は一様とみなすことはできない．

数項がなく，したがって全散乱断面積は

$$\sigma \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^2 \theta^2 \sim (Z\alpha)^4 r_e^2 \tag{125.4}$$

となる (H. A. Bethe, F. Rohrlich, 1952).

§126. 電磁場の方程式に対する輻射補正

電子－陽電子場の量子化の際 (§25)，真空のエネルギーに対する式のなかに無限大の定数が現われたことを見てきた．それは

$$\mathcal{E}_0 = -\sum_{p\sigma} \varepsilon_{p\sigma}^{(-)} \tag{126.1}$$

の形に書くことができる[1]．ここで $-\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ はディラック方程式の解の負振動数である．この定数自身は物理的意味をもたない．真空のエネルギーはその定義により0に等しいからである．他の面からは，電磁場が存在するとエネルギー $\varepsilon_{p\sigma}^{(-)}$ は変化する．この変化は有限であり，一定の物理的意味をもっている．これは空間の性質の電場への依存性を記述し，真空中の電磁場の方程式を変化させる．

場の方程式の変化は，そのラグランジュ関数の変化により表わされる．ラグランジュ関数の密度 L は相対論的不変量であり，したがって不変量 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$ および $\boldsymbol{EH}$ だけの関数である．普通の式

$$L_0 = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2) \tag{126.2}$$

は，一般式の不変量についての展開の第1項である．

われわれは，場 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ が空間および時間についてかなりゆっくりと変化し，一様かつ一定であると考えることができるような場合に，ラグランジュ関数を求めよう．このためには，場の変化の（特性を示す）振動数 ω と波動ベクトル $\boldsymbol{k}$ が，不等式

$$\omega \ll m, \quad |\boldsymbol{k}| \ll m \tag{126.3}$$

を満足する必要がある．このとき，L は場の微係数を含まないと考えることができる．

しかしながら，設定された問題が意味をもつためには，さらに電場が十分に弱いと仮定する必要がある．それは，一様な電場は真空から対を生成できることが問題なのである．対生成の確率が十分に小さいときにのみ，この電場自体は閉じた系として許される．すなわち

1) 電場の張力との混同を避けるために，ここでは E の代りに記号 $\mathcal{E}$ を書く．

$$|\boldsymbol{E}| \ll \frac{m^2}{e}\left(=\frac{m^2c^3}{e\hbar}\right) \tag{126.4}$$

でなければならない（電荷 e のエネルギーの変化が距離 $\hbar/mc$ では mc^2 にくらべて小さくなければならない）．われわれは先へいって（また問題2参照），このような場合，対生成の確率が指数関数的に小さいことがわかるだろう．

もしも電場とならんで磁場もまた存在するならば，一般的に言って，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とが平行になるような基準系を選ぶことが可能である．このとき磁場は $\boldsymbol{E}$ 方向の電荷の運動には影響を与えない．すなわち，この系では（この選択はこの先の計算でも暗に了解されているものとする）条件（126.4）が満足されなければならない．

ラグランジュ関数の計算を真空エネルギーの変化 W' の決定から始めよう．量 W' は場による《零点エネルギー》(126.1) の変化によって与えられる．しかしながら，この量からさらに負エネルギーをもつ《状態》にある電子のポテンシャル・エネルギーの平均値を差し引く必要がある．この最後の差し引きは，単に真空の全電荷が定義から0に等しいことを意味するだけである．

場があるときの零点エネルギーは

$$\mathcal{E}_0 = -\sum_{\boldsymbol{p}\sigma} \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)} = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\int \psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)*}\, i\frac{\partial}{\partial t}\psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)}\, d^3x$$

である．ここで $\psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)}$ は与えられた場のディラック方程式の負の振動数の解である．積分は単位体積にわたって行なわれ，波動関数はその体積で1に規格化されていると仮定しよう．このとき $\mathcal{E}_0$ は単位体積のエネルギーである．上に述べたことにより，$\mathcal{E}_0$ からつぎの量を差し引かなければならない．

$$U_0 = \sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\int \psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)*}\, e\varphi\psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)}\, d^3x.$$

ここで $\varphi = -\boldsymbol{E}\boldsymbol{r}$ は一様な場のポテンシャルである．演算子のパラメータについての微分に関する定理（III，§11 の問題）にしたがって

$$U_0 \equiv \boldsymbol{E}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)*}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{E}}\psi_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)}\, d^3x = -\boldsymbol{E}\sum_{\boldsymbol{p}\sigma}\frac{\partial \varepsilon_{\boldsymbol{p}\sigma}^{(-)}}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}$$

となる．このようにして，真空のエネルギー密度の全体の変化は

$$W' = \left(\mathcal{E}_0 - \boldsymbol{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}\right) - \left(\mathcal{E}_0 - \boldsymbol{E}\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0} \tag{126.5}$$

となる．W' をラグランジアン密度の変化 $L'(L = L_0 + L')$ に結びつけよう．このため

に，一般式

$$W = \sum \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

が使われる．ここで q は場の《一般化された座標》である（II，§32 参照）．電磁場に対しては量 q の役割をポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と φ が果たしている．

$$\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \quad \boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{126.6}$$

であるから，《速度》$\dot{q}$ としては L のなかには $\dot{\boldsymbol{A}}$ のみが含まれる．また $\dot{\boldsymbol{A}}$ による微分は $\boldsymbol{E}$ による微分と同等である．したがって

$$W' = \boldsymbol{E}\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}} - L' \tag{126.7}$$

となる．(126.5) と (126.7) とをくらべて

$$L' = -[\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_0|_{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}=0}] \tag{126.8}$$

を得る．このようにして，L' の計算は和 (126.1) の計算になってしまう．

初めに磁場だけがある場合を考察しよう．一様な定磁場 $H_z = H$ のなかにある電子（電荷 $e = -|e|$）の負のエネルギー準位は

$$-\varepsilon_{\boldsymbol{p}}^{(-)} = -\sqrt{m^2 + |e|H(2n - 1 + \sigma) + p_z^2} \\ (n = 0, 1, 2, \cdots;\ \sigma = \pm 1) \tag{126.9}$$

である（§32 の問題参照）．和の計算のために，区間 dp_z のあいだにある状態の数は

$$\frac{|e|H}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi}$$

であること（III，§111 参照）を考慮しよう．この第1の因子は p_x の異なる値をもつ状態の数である．エネルギーはこれには依存しない．このほか $n = 0$, $\sigma = -1$ をもつ準位のみを例外として，すべての準位は2重縮退である．n, $\sigma = +1$ と $n + 1$, $\sigma = -1$ をもつ準位は一致する．したがって

$$-\mathcal{E}_0 = \frac{|e|H}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sqrt{m^2 + p_z^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m^2 + 2|e|Hn + p_z^2}\right\}dp_z \tag{126.10}$$

となる．

(126.10) のなかの積分の発散は L' (126.8) の計算の際に，$H = 0$ のときの和の値を差し引くことにより消去される．この《くりこみ》を行なうためには，初めにつぎの収束する式を計算するとつごうがよい．

$$\begin{aligned}\Phi &\equiv -\frac{\partial^2 \mathcal{E}_0}{(\partial m^2)^2}\\ &= -\frac{|e|H}{2(2\pi)^2}\int_0^\infty \left\{(m^2+p_z^2)^{-3/2} + 2\sum_{n=1}^\infty (m^2+2|e|Hn+p_z^2)^{-3/2}\right\} dp_z\\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\left\{\frac{1}{m^2} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{m^2+2|e|Hn}\right\}.\end{aligned}$$

波括弧のなかの和はつぎの方法で幾何級数の和になる．すなわち

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[2\sum_{n=0}^\infty e^{-2|e|Hn\eta} - 1\right] d\eta\\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\left[\frac{2}{1-e^{-2|e|H\eta}} - 1\right] d\eta\\ &= -\frac{|e|H}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-m^2\eta}\,\mathrm{cth}\,(|e|H\eta)\,d\eta \qquad (126.11)\end{aligned}$$

である．L' を求めるために，今は Φ を m^2 について2度積分する．そのあとで $H=0$ としたときに得られる値を差し引くと

$$L' = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-m^2\eta}}{\eta^3}\{\eta|e|H\,\mathrm{cth}\,(\eta|e|H) - 1\}\,d\eta + c_1 + c_2 m^2 \qquad (126.12)$$

が得られる．ここで c_1 と c_2 とは H には依存するが m^2 にはよらない．

次元の考察と，H について偶であることから，L' は H および m の関数として

$$L' = m^4 f\left(\frac{H^2}{m^4}\right)$$

の形をもたねばならない．したがって，m^2 について奇である項は一般に L' のほかには存在できないので $c_2=0$ である．係数 c_1 は L' の H^2 についての冪展開が $\sim H^4$ の項から始まるようにする条件から決定される．事実，L' のなかの $\sim H^2$ の項は，単にもとのラグランジアン $L_0 = -H^2/8\pi$ のなかの係数の変化を意味するだろう．そしてこれは，本質的には場の張力の定義の変化，すなわち電荷の変化になるはずである．したがって～H^2 の項の消去は電荷のくりこみを意味する．このためには

$$c_1 = \frac{H^2e^2}{3\cdot 8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta}\,d\eta$$

と置く必要があることを証明するのは容易である．最後に (126.12) でさらに置き換え $m^2\eta \to \eta$ を行なって，最終的に

$$L'(H;\ E=0) = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \left\{-\eta b\,\mathrm{cth}\,b\eta + 1 + \frac{b^2\eta^2}{3}\right\} e^{-\eta}\,\frac{d\eta}{\eta^3} \qquad (126.13)$$

を得る．ここで $b=|e|H/m^2$ である．

磁場とならんで，それに平行で，条件 (126.4) を満足する電場 $\boldsymbol{E}$ もまた存在するような一般の場合にもどろう．

しかしながらこの場合に，L' を計算するためには場のなかの電子のエネルギー準位 ($\varepsilon_{\boldsymbol{p}}^{(-)}$) を決める問題を新たに解く必要はない．もしも2次方程式 (32.7) の解である波動関数を，積

$$\psi=\psi_E(z)e^{ip_x x}\chi_{n\sigma}(y)$$

の形に置けば（ここで $\chi_{n\sigma}(y)$ は $\boldsymbol{E}=0,\ p_z=0$ のときの磁場のなかの波動関数である），質量 m と場 H とは $\psi_E(z)$ に対する方程式のなかに

$$m^2+|e|H(2n+1+\sigma)$$

の組み合わせで入ってくることに気がつけば十分である．もしも今，p_x（エネルギー準位はこれには依存しない）についての和が，今まで通り，因子 $|e|H/2\pi$ を与えることを考慮すれば，次元の考察から

$$\Phi(H,E)\equiv\frac{\partial^2 L'}{(\partial m^2)^2}$$

という量はつぎの形に書くことができる．

$$\begin{aligned}\Phi(H,E)&=-\frac{|e|H}{8\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=\pm1}\frac{F\left(\dfrac{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)}{|e|H}\right)}{m^2+|e|H(2n+1+\sigma)}\\&=-\frac{b}{8\pi^2}\left\{F\left(\frac{1}{a}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F\left(\dfrac{1+2bn}{a}\right)}{1+2bn}\right\},\quad a=\frac{|e|E}{m^2}\end{aligned}\qquad(126.14)$$

（ここでこの和の各項は $-d^2\varepsilon_{\boldsymbol{p}}^{(-)}/(dm^2)^2$ で，n のほかのすべての量子数について和をとってある）．F はこれまでのところでは未知の関数で，これは相対論的不変性の考察から求めよう．

実際に，Φ はスカラー H^2-E^2 および $(EH)^2=(\boldsymbol{EH})^2$ の関数でなければならない．すなわち

$$\Phi(H,E)=f(H^2-E^2,(EH)^2).$$

したがって

$$\Phi(0,E)=f(-E^2,0)=\Phi(iE,0)$$

である．そして関数 $\Phi(iE,0)$ は (126.11) から置き換え $H\to iE$ により得られる．積分変数の変換を行なったあとで

$$\Phi(iE, 0) = \frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty e^{-\eta/a}\,\mathrm{ctg}\,\eta\,d\eta \tag{126.15}$$

を得る．

この式を，(126.14) から計算された極限 $\Phi(H\to 0, E)$ とくらべて，関数 F を見いだすことができる．

(126.14) で極限 $H\to 0$ への移行は，n についての和を $dn = dx/2b$ についての積分に置き換えることによって実行される．すなわち

$$\Phi(0, E) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^\infty F\left(\frac{1+x}{a}\right)\frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{1/a}^\infty \frac{F(y)}{y}\,dy \tag{126.16}$$

である．(126.15) と (126.16) を等しいと置き，この等式を $1/a\equiv z$ について微分して

$$\frac{F(z)}{z} = -\int_0^\infty e^{-\eta z}\eta\,\mathrm{ctg}\,\eta\,d\eta$$

を得る．

このあとで (126.14) のなかの和はふたたび幾何級数の和になり，それから先の計算は前にやったのと同様である．(126.13) を導くときのように Φ を m^2，E および H で表わし，m^2 について2度積分し，$E=H=0$ のときの値を差し引いて，積分定数を決める．最終的な結果は[1]

$$\begin{gathered}L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta}}{\eta^3}\left\{-(\eta a\,\mathrm{ctg}\,\eta a)(\eta b\,\mathrm{cth}\,\eta b) + 1 - \frac{\eta^2}{3}(a^2-b^2)\right\}d\eta,\\ a = \frac{|e|E}{m^2}\left(=\frac{|e|\hbar E}{m^2c^3}\right),\quad b = \frac{|e|H}{m^2}\left(=\frac{|e|\hbar H}{m^2c^3}\right)\end{gathered} \tag{126.17}$$

となる．

ここで，この公式を書くときの制約の特徴をいくつか指摘しよう．これは電場が小さいという条件を守るときにだけ役に立つ．すなわち $a\ll 1$ (126.4) である（そして (126.17) ではあらわな形では考慮されない）．これはつぎの点に現われている．(126.17) の被積分式は $\eta = n\pi/a$ $(n = 1, 2, \cdots)$ のとき極をもっているので，厳密に言えば，そこに書かれた形の積分は意味をもたない．したがって，(126.17) は $\mathrm{ctg}\,a$ の形式的展開をすることにより，a についての漸近級数（下記参照）の項を得るためにだけ役立つものである．

---

1) この結果はハイゼンベルクおよびオイラーによって最初に求められた (W. Heisenberg, H. Euler, 1935). 上述の計算には，ワイスコップが提案した導き方の考えもまた使われている (V. Weisskopf, 1936).

数学的には複素 η 平面内で極を迂回して，積分 (126.17) に意味を与えることができる．このとき L' に，したがってエネルギー密度 W' に虚部が現われる．いつものように，エネルギーが複素量であることは準定常状態を意味している[1]．この場合定常性は対生成により破られる．しかし $-2\,\mathrm{Im}\,W'$ という量は単位体積，単位時間あたりの対生成の確率 w である．W および L に対する微少付加項は符号だけが違っているので，$\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ を使って表わされた確率 w は単に

$$w = 2\,\mathrm{Im}\,L' \tag{126.18}$$

に等しい．これが $e^{-\pi/a}$ に比例する（下記 (126.20) 参照）ことは明らかである．すなわち $a \ll 1$ のときに $\mathrm{Im}\,W'$ が指数関数的に小さいために，a の冪についての漸近級数は，任意の有限個の項に制限する限り意味をもっている．

公式 (126.17) の極限の場合を考察しよう．弱い場 ($a \ll 1$, $b \ll 1$) では展開の第1項は

$$L' = \frac{m^4}{8\pi^2}\frac{(a^2-b^2)^2+7(ab)^2}{45} = \frac{e^4}{45\cdot 8\pi^2 m^4}[(\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2)^2+7(\boldsymbol{EH})^2] \tag{126.19}$$

である．特に $b=0$ のとき相対的補正は

$$\frac{L'}{L_0} = \alpha\,\frac{a^2}{45\pi}$$

となる．また，このあとで，L は ((126.19) のように) 不変量 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$ および $\boldsymbol{EH}$ を使って表わされるので，この公式はしたがって任意の基準系で使うことができる ($\boldsymbol{E}\,/\!\!/\,\boldsymbol{H}$ であるような系だけではない) ことを指摘しよう．

$a \ll 1$ のとき L' の虚部は，0に最も近い余切の極，すなわち $\eta a = \pi - i0$ の半留数をとることにより，積分 (126.17) から得られる．(126.18) にしたがって，これは弱電場による対生成確率を与える．すなわち

$$w = \frac{m^4}{4\pi^3}a^2 e^{-\pi/a} = \frac{1}{4\pi^3}\left(\frac{eE\hbar}{m^2c^3}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3\exp\left(-\frac{\pi m^2c^3}{|e|\hbar E}\right) \tag{126.20}$$

である．

強い磁場 ($a=0$, $b \gg 1$) のなかで ($b\eta \to \eta$ の置き換えのあとで)

$$L' = \frac{m^4b^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\eta/b}}{\eta}\left[\frac{1}{3}-\frac{\eta\,\mathrm{cth}\,\eta-1}{\eta^2}\right]d\eta$$

---

1) 積分のなかで迂回の向きは，$\mathrm{Im}\,W'<0$ になるように選ばれる．普通の質量の置き換えの規則 $m^2 \to m^2 - i0$（すなわち，今の場合には $a \to a+i0$）がこの要求に対応している．

の形に書かれた公式 (126.13) から出発しよう．$b \gg 1$ のときに，この積分のなかで $1 \ll \eta \ll b$ の領域が重要である．ここでは $e^{-\eta/b} \approx 1$ であり，括弧内の第2項は無視してもよい．そして (対数的精度で) 積分は $\eta \approx 1$ および $\eta \approx b$ で切断してもよい．このとき

$$L' = \frac{m^4 b^2}{24\pi^2} \ln b \tag{126.21}$$

である (さらに正確な計算は $\ln b$ を $\ln b - 2.29$ に置き換える)．この場合には比

$$\frac{L'}{L_0} \approx \frac{\alpha}{3\pi} \ln b$$

になる．これから，場の方程式に対する輻射補正は，指数関数的に大きい場，すなわち

$$H \sim \frac{m^2}{|e|} e^{3\pi/\alpha} \tag{126.22}$$

のなかでのみ，相対的大きさが1の程度に達することができる．

それにもかかわらず，計算された補正は意味をもっている．これはマクスウェル方程式の線形性を壊し，それにより原理的には観測される効果 (たとえば，光の光による散乱，あるいは外場による散乱) をもたらすことになる．

張力 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{H}$ とポテンシャル $\boldsymbol{A}$ および φ との関係は，定義から以前のまま残り (126.6) である．したがって，マクスウェル方程式の初めの対もまた変わらない．すなわち

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

である．方程式の2番目の対は，作用

$$S = \int (L_0 + L')\, d^4x$$

の $\boldsymbol{A}$ および φ の変分をとることにより求められる．それらは

$$\operatorname{rot} (\boldsymbol{H} - 4\pi \boldsymbol{M}) = \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}), \tag{126.23}$$

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}) = 0 \tag{126.24}$$

の形に書くことができる．ここで記号

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}}, \quad \boldsymbol{M} = \frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{H}} \tag{126.25}$$

が導入された．形の上からは方程式 (126.23)，(126.24) は物質媒質中の場に対する巨視

的マクスウェル方程式と一致している[1]．これから，$\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{M}$ という量が真空の電気的および磁気的偏りの意味をもつことがわかる．

最後に平面波の場合には $\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{M}$ が0になることを指摘しよう．この場合には，よく知られているように，二つの不変量 $\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{H}^2$ および $\boldsymbol{EH}$ は0に等しい．言いかえれば，平面波に対しては真空中の非線形補正は存在しないわけである．

問　題

1. 動かない小さい電荷 e_1 に対する，非線形マクスウェル方程式と関係した補正を求めよ．

解　$\boldsymbol{H}=0$ のとき，(126.19) から

$$\boldsymbol{P}=\frac{\partial L'}{\partial \boldsymbol{E}}=\frac{\alpha^2}{90\pi^2 m^4}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^2 \tag{1}$$

となる．中心対称の場合には，(126.24) から

$$(E+4\pi P)r^2=\mathrm{const}=e_1 \tag{2}$$

となる（定数は，$r\to\infty$ としたとき，この場が電荷 e_1 によるクーロン場と一致するという条件から決定される）．(2) を近似的に解いて

$$E=\frac{e_1}{r^2}\left(1-\frac{2\alpha^2 e_1^2}{45\pi m^4 r^4}\right),$$

あるいは

$$\Phi=\frac{e_1}{r}\left(1-\frac{2\alpha^2 e_1^2}{225\pi m^4 r^4}\right) \tag{3}$$

を得る．

(3) のなかの e_1 に関し非線形の補正は，結局クーロン場が一様でないことに結びついた (111.6) のなかの線形の補正と区別しなければならない．補正 (3) は α についてより高次であるが，距離とともにゆっくり減少し，e_1 が増えると急激に大きくなる．

2. 弱い一様な定電場内での対生成の確率を，準古典的近似で，指数的精度で直接に評価をせよ (F. Sauter, 1931)．

解　弱い電場 $\boldsymbol{E}$（ゆっくり変化するポテンシャル $\varphi=-\boldsymbol{Er}=-Ex$）内の運動は準古典的である．反応の振幅のなかで，終りの陽電子の波動関数は始めの《負振動数の》関

[1] 比較にあたって，巨視的電気力学では磁場の平均値はここのように $\boldsymbol{H}$ でなく $\boldsymbol{B}$ と置かれることを思い出す必要がある．

数の形で入っているので，対生成は電子が《負振動数の》状態から《正振動数の》状態への遷移として考えることができる．場があるとこれらのなかの1番目のもののなかで，準古典的運動量 $p(z)$ は等式

$$\varepsilon = -\sqrt{p^2(z)+m^2} + |e|Ez \tag{1}$$

で，また2番目のものは

$$\varepsilon = +\sqrt{p^2(z)+m^2} + |e|Ez \tag{2}$$

で定義される．1番目の状態から2番目への遷移は，ε が与えられたとき，実の $p(z)$ をもつ依存性 (1) および (2) が成り立つ領域を分離しているポテンシャル障壁（$p(z)$ が虚の領域）を通過する遷移である．この障壁の境界 z_1 および z_2 は $p(z)=0$ のところにある．すなわち

$$\varepsilon = -m + |e|Ez_1, \quad \varepsilon = +m + |e|Ez_2$$

である．この準古典的障壁を通過する遷移確率は

$$w \backsim \exp\left(-2\int_{z_2}^{z_1} |p(z)|\,dz\right) = \exp\left(-4\frac{m^2}{eE}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\,d\xi\right)$$

である．これから

$$w \backsim \exp\left(-\frac{\pi m^2}{|e|E}\right)$$

となり，(126.20) と一致する．

§127. 4次元領域の積分の計算

ここで輻射補正の理論に現われる積分の計算に有用ないくつかの規則と公式をまとめておこう．

ファインマン図形に対応する積分の典型は

$$\int \frac{f(k)\,d^4k}{a_1 a_2 \cdots a_n} \tag{127.1}$$

である．ここで $a_1, a_2, \cdots$ は4-ベクトル k についての2次の多項式で，$f(k)$ はある n' 次の多項式である．そして積分は4次元の k-空間全部にわたって行なわれる．

このような積分の便利な計算法（ファインマンによる．1949）は，被積分関数をあらかじめ変換する（パラメータ化する）ことに基づいたものである．それは公式

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)!\int_0^1 d\xi_1 \cdots \int_0^1 d\xi_n \frac{\delta(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n-1)}{(a_1\xi_1+a_2\xi_2+\cdots+a_n\xi_n)^n} \tag{127.2}$$

にしたがって，補助的変数 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ についての積分を追加することによって行なわれる．このような変形の結果，分母のなかの n 個の異なる2次多項式の代りに，すべて同じ2次多項式の n 乗が現われる．

$d\xi_n$ についての積分により δ - 関数を消去し

$$\xi_1 = x_{n-1}, \quad \xi_2 = x_{n-2} - x_{n-1}, \cdots, \xi_{n-1} = x_1 - x_2,$$
$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} = x_1$$

にしたがって新変数を導入し，公式 (127.2) はそれと同等な形

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \\ \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-2} - x_{n-1}) + \cdots + a_n(1 - x_1)]^n} \tag{127.3}$$

になる．

$n = 2$ のとき，この公式は

$$\frac{1}{a_1 a_2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a_1 x + a_2(1-x)]^2} \tag{127.4}$$

の形になり，直接の積分によっても確かめられる．一般的な n の場合にこの公式は $n-1$ から n への帰納法によって証明することができる．実際に (127.3) のなかで dx_{n-1} についての積分を行なうと，等式の右辺では二つの同型の $(n-2)$ - 重積分の差が得られる．これらに対してはこの公式が成立するものと仮定すると

$$\frac{1}{a_1 - a_2}\left[\frac{1}{a_2 a_3 \cdots a_n} - \frac{1}{a_1 a_3 \cdots a_n}\right]$$

を得る．これは等式 (127.3) の左辺の式と一致する．

(127.3) を $a_1, a_2, \cdots$ について微分して，分母に多項式のどれかを1次よりも高次の乗冪で含むような積分のパラメータ化に役立つ類似の公式を得ることができる．

発散積分の正則化は，これらの積分から同じ形の積分を差し引くことによって実現される．このような差の計算のためには，被積分式（そのおのおのはすでに (127.2) を使って変形されている）の差を，つぎの公式を使ってあらかじめ変形しておくのが目的にかなっている．すなわち

$$\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} = -\int_0^1 \frac{n(a-b)\,dz}{[(a-b)z + b]^{n+1}} \tag{127.5}$$

である．

(127.3) にしたがった変形のあとで，(127.1) の4次元積分は

$$\int \frac{f(k)\,d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^n} \tag{127.6}$$

の形になる．ここで l は 4－ベクトルである．α^2 はスカラーで両方ともパラメータ $x_1, \cdots, x_{n-1}$ に依存する．スカラー α^2 は正と考えられる．

もしも積分 (127.6) が収束すれば，そこでは $k-l\to k$ にしたがった変数の置き換えを行なうことができる（座標原点の移動）．そのあとでこれは

$$\int \frac{f(k)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} \tag{127.7}$$

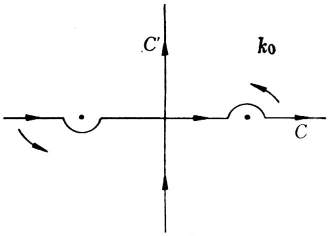
の形になる（$f(k)$ は前とは別の関数である）．したがって分母には平方 k^2 のみを含んでいる．分子に関しては，スカラー関数 $f=F(k^2)$ を考察することに限って十分である．実際に，分子が別の形をもつ積分に対して

$$\int \frac{k^\mu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=0, \tag{127.8}$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\int \frac{k^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}, \tag{127.9}$$

$$\int \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}=\frac{1}{24}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\int \frac{(k^2)^2F(k^2)\,d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n}, \tag{127.10}$$

その他が成り立つ．これは（k のすべての方向にわたって積分するとき）対称性の考察からもすでに明らかである．



第 24 図

もとの積分 (127.1) では分母の因子 $a_1, a_2, \cdots$ のおのおのは（k_0 の関数として）極を二つずつもっていて，それは普通の方法で迂回された（§76）．(127.7) の形に変形したあとでは，$2n$ 個の単純な極の代りに，被積分関数は二つの n 次の極をもっている．そしてこれは同じ規則で迂回される（第24図の積分路 C）．積分路を矢印で示されるように動かして，これを k_0－面の虚軸と重ねることができる（第24図の C'）．言いかえれば，変数 k_0 は実変数 k'_0 を使って $k_0=ik'_0$ で置き換えられる．また記号 $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{k}'$ に変えて

$$k^2=k_0^2-\boldsymbol{k}^2\to-(k_0'^2+\boldsymbol{k}'^2)=-k'^2 \tag{127.11}$$

となる．ここで k' はユークリッド計量の4－ベクトルである．このとき d^4k はつぎのようになる．

$$d^4k \to id^4k' = ik'^2 d\frac{k'^2}{2} d\Omega.$$

ここで $d\Omega$ は4次元の立体角要素である．$d\Omega$ による積分は $2\pi^2$ を与える（II，§107参照）．そのあとで

$$d^4k \longrightarrow i\pi^2 k'^2 d(k'^2) \tag{127.12}$$

となる．$k'^2 = z$ と置いて，最終的に

$$\int \frac{F(k^2)\, d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = (-1)^n i\pi^2 \int_0^\infty \frac{F(-z)\, z\, dz}{(z+\alpha^2)^n} \tag{127.13}$$

を得る．特に

$$\int \frac{d^4k}{(k^2-\alpha^2)^n} = \frac{(-1)^n i\pi^2}{\alpha^{2(n-2)}(n-1)(n-2)} \tag{127.14}$$

である．

積分（127.7）の対数的に発散する部分は

$$\int \frac{d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2} \tag{127.15}$$

の形に分離することができる．このような積分では変換 $k \to k+l$ が許されることが容易にわかる．実際に初めの積分と変換された積分との差

$$\int \left\{ \frac{1}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{1}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k$$

は収束積分であり，したがってこのなかでは置き換え $k \to k+l$ はあらゆる場合に許される．それを行なったあとでさらに置き換え $k \to -k$ を行なうと，符号の違った同じ量が得られる．このことからこの等式が0に等しいことが出てくる．

線形に発散する積分は

$$\int \frac{k^\mu d^4k}{[(k-l)^2-\alpha^2]^2} \tag{127.16}$$

の形をもたなければならない．しかし実際にはこのような積分は対数的に発散する．被積分式は（$k \to \infty$ のとき）漸近的には $k^\mu/(k^2)^2$ に等しく，方向について積分すると0になる．しかしながら，原点の移動は積分（127.16）を不変のままにはしておかないで，それに付加定数を付け加える．無限小の移動 $k \to k+\delta l$ の場合に対してこれを示そう．それにはつぎの差を計算する．

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{k^\mu}{[(k-\delta l)^2-\alpha^2]^2} - \frac{k^\mu + \delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4k. \tag{127.17}$$

δl について1次の項までの精度で

$$\Delta^\mu = \int \left\{ \frac{4k^\mu (k\delta l)}{(k^2-\alpha^2)^3} - \frac{\delta l^\mu}{(k^2-\alpha^2)^2} \right\} d^4 k$$

となる．第1項では方向による平均は分子を $k^2 \delta l^\mu$ に変える ((127.9) 参照)．そのあとで

$$\Delta^\mu = \alpha^2 \delta l^\mu \int \frac{d^4 k}{(k^2-\alpha^2)^3} = -\frac{i\pi^2}{2} \delta l^\mu \tag{127.18}$$

になる[1]．

輻射補正の最終的な式のなかにしばしば，積分

$$F(\xi) = \int_0^\xi \frac{\ln(1+x)}{x} dx \tag{127.19}$$

で定義される超越関数が現われる（これをときどき**スペンス関数**と呼ぶ)．ここで参考のためにそれのいくつかの性質をあげておこう．

$$F(\xi) + F\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2}\ln^2 \xi, \tag{127.20}$$

$$F(-\xi) + F(-1+\xi) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln\xi \ln(1-\xi), \tag{127.21}$$

$$F(1) = \frac{\pi^2}{12}, \quad F(-1) = -\frac{\pi^2}{6}. \tag{127.22}$$

ξ が小さいときの展開は

$$F(\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{9} - \frac{\xi^4}{16} + \cdots \tag{127.23}$$

である．

1) l が有限のときには，もっと膨大な計算で同じ結果に到着する．

第13章　量子電気力学の漸近公式

§128. 運動量が大きいときの光子伝播関数の漸近的振舞い

§110 において，偏りの演算子 $\mathcal{P}(k^2)$ の（α についての）展開の第 1 項が計算された．そして $|k^2| \gg m^2$ のときに対数的精度で，それがつぎの形をもつことがわかった．

$$\mathcal{P}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{|k^2|}{m^2}. \tag{128.1}$$

そこでは，この公式の導き方の（伝播関数 $4\pi D^{-1} = k^2$ に対する 1 次近似の補正という）意味から，条件

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \ll 1 \tag{128.2}$$

が満足されていると仮定された．この条件は $|k^2|$ の大きい側での公式の適用性を制限している．ここでは，実際に式 (128.1) はもっと弱い条件

$$\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|k^2|}{m^2} \lesssim 1 \tag{128.3}$$

でもそのまま成立することを示そう．

証明の経過はつぎのようになる[1]．まず第一に，条件 (128.3) のときに $\mathcal{P}(k^2)$ のなかの寄与は，原理的には摂動展開の（α についての）すべての次数の項から生じているけれども，おのおのの次数の（n 次の）なかでは，α の乗冪と同じ大きい対数の乗冪を含む項 $\sim \alpha^n \ln^n \left(\frac{|k^2|}{m^2}\right)$ だけを考慮すればよいことに注目しよう．対数の低い乗冪の項はもちろん不等式 $\alpha \ll 1$ であるから小さくなる．

さらにダイソンの方程式を使うと $\mathcal{P}$ に対する摂動展開の検討は結局，$\mathcal{G}$ および Γ^μ に対する級数を検討することに帰してしまう．この方程式は

$$\mathcal{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3} \mathrm{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma^\mu (p+k, p;\, k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{128.4}$$

---

1) 上記の問題の立て方および結果は，エリ・デ・ランダウ，ア・ア・アブリコソフ，およびイ・エム・ハラトニコフのものである (1954).

である ((104.4) 参照). 関数 $\mathcal{P}(k^2)$ はゲージ不変量であるから，その計算に際しては，量 $\mathcal{G}$ および Γ に対して任意のゲージを選ぶことができる. この目的のためにはランダウ・ゲージが一番便利である. この場合には自由光子の伝播関数は (77.11) の形になる. すなわち

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \tag{128.5}$$

である ((100.17) で $D^{(l)} = 0$ と置く). 実際にこのようなゲージでは，$\mathcal{G}$ および Γ^μ に対する摂動展開は一般には必要な対数の乗冪をもつ項を含まない. したがって (128.4) では $\mathcal{G}$ および Γ^μ に対してゼロ近似をとれば十分である. すなわち $\mathcal{G} = G$, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ である. このとき (128.4) は積分

$$\mathcal{P}(k^2) = i\frac{4\pi\alpha}{3}\,\mathrm{Sp}\int \gamma_\mu G(p+k)\gamma^\mu G(p)\frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tag{128.6}$$

になる. これは (α について) 1次近似の図形 (110.1) に対応するファインマン積分であり，(適当なくりこみのあとでは) 公式 (128.1) になる.

設定した命題の証明に着手して，まず第一に，積分 (128.6) のなかで対数の由来を追及しよう. 対数項は積分の

$$|k^2| \gg m^2 \quad \text{のときの} \quad p^2 \gg |k^2| \tag{128.7}$$

の領域から生じている. 実際に，G を形式的に $1/\hat{p}$ について展開し

$$G(p) \approx \frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2},$$

$$G(p-k) \approx \frac{1}{\hat{p}-\hat{k}} \approx \frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}}\hat{k}\frac{1}{\hat{p}} + \frac{1}{\hat{p}}\hat{k}\frac{1}{\hat{p}}\hat{k}\frac{1}{\hat{p}} = \frac{\hat{p}}{p^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^2} + \frac{\hat{p}\hat{k}\hat{p}\hat{k}\hat{p}}{(p^2)^3}$$

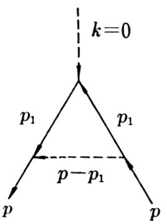
を得る. (128.6) に代入すると，k に依存しない第1項は正則化の結果落ちてしまう ($k^2 \to 0$ のとき $\mathcal{P}/k^2 \to 0$ の条件に適合している). 第2項は p の方向について積分すると0になる. 3番目の積分は p^2 について対数的に発散する. これを $p^2 \sim |k^2|$ (領域 (128.7) の下限) からある補助的な《切断パラメータ》Λ^2 までの限界内で積分して

$$-\frac{\alpha}{3\pi}k^2 \ln\frac{\Lambda^2}{|k^2|} \tag{128.8}$$

を得る. 正則化のためには $\mathcal{P}/k^2$ から，その $k^2 = 0$ での値を差し引かなければならない. しかし対数精度は $|k^2| \gg m^2$ を仮定しているので，この精度での計算の際には，正則化は $|k^2| \sim m^2$ のときの値を差し引くことによって実現する. この結果，対数の引数中の Λ^2 は m^2 に置き換えられて (128.1) に到達する.

われわれにとって重要な，$\mathcal{G}$ および Γ^{μ} の補正は対数的性質をもつので，それを考慮すると $\mathcal{G}$ および Γ^{μ} と G および γ^{μ} との違いはゆるやかに変化する対数因子ということになる．したがって，正確な積分 (128.4) のなかでも，近似的積分 (128.6) のなかとまったく同じ領域 (128.7) が重要である．それにもかかわらず，$\Gamma^{\mu}(p+k, p\,;\,k)$ のなかでは単純に $k=0$ と置いてはいけない．すなわち積分が2次の発散であるために，その正則化には $\Gamma^{\mu}(p+k, p\,;\,k)$ の k についての幂展開のつぎの二つの項をも考察することが要求される．しかしながら，ここでは $\Gamma^{\mu}(p, p, 0)$ に対する補正の考察だけに限ることにしよう．ゲージの選択の役割や，いろいろの図形から生じる積分の性質の違いを，明瞭に示すのにはこれで十分である．また，Γ および $\mathcal{G}$ の補正は，ウォードの恒等式 (105.8) で互いに結びつけられているので，$\mathcal{G}$ に対する研究は必要ではないことを指摘しよう．

$\Gamma(p, p\,;\,0)$ の (α について) 1次の補正はつぎの図形に対応する．



したがって積分

$$\Gamma^{\mu(1)} = -i\alpha\int \gamma^{\lambda} G(p_1)\gamma^{\mu} G(p_1)\gamma^{\nu} D_{\lambda\nu}(p-p_1)\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \tag{128.9}$$

に対応する[1]．普通のゲージでは

$$D_{\lambda\nu}(p-p_1) = g_{\lambda\nu}\frac{4\pi}{(p-p_1)^2}$$

そして $p_1^2 \gg p^2$ の区間が重要である．それは対数的に発散する．積分

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i\int \frac{\gamma^{\lambda}\hat{p}_1\gamma^{\mu}\hat{p}_1\gamma_{\lambda}}{(p_1^2)^3}\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \tag{128.10}$$

を計算し，対数を正則化して

---

1) §114 の結果とくらべるときに誤解を避けるために，§114 では図形の二つの電子端は物理的と仮定されていたが，しかしながらここでは $p^2 \gg |k^2| \gg m^2$ であるから，もちろん二つの線は非物理的であることを思い起こそう．

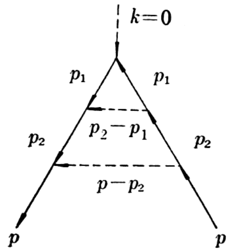
$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^{\mu}\ln\frac{p^2}{m^2}$$

を得る．ランダウ・ゲージでは（128.10）の代りに積分

$$\Gamma^{\mu(1)} \approx -4\pi\alpha i\int\{\gamma^{\lambda}\hat{p}_1\gamma^{\mu}\hat{p}_1\gamma_{\lambda}-p_1^2\gamma^{\mu}\}\frac{d^4p_1}{(p_1^2)^3(2\pi)^4}$$

を得る．p_1 の方向についての積分を行ない，行列 γ の縮約を行なうと，この積分は0になる．そして $\Gamma^{\mu(1)}$ のなかの対数項は落ちる[1]．

（α について）2次の補正のなかでは，図形



を考察する．これに対応する積分は

$$\Gamma^{\mu(2)} = -\alpha^2\int\gamma^{\lambda}G(p_2)\gamma^{\nu}G(p_1)\gamma^{\mu}G(p_1)\gamma^{\rho}G(p_2)\gamma^{\sigma} \times D_{\nu\rho}(p_2-p_1)D_{\lambda\sigma}(p-p_2)\frac{d^4p_1d^4p_2}{(2\pi)^8}$$

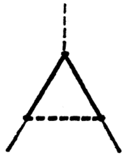
である．D－関数を普通のゲージにするとこの積分は対数の平方の項を含む．これは積分領域

$$p_1^2 \gg p_2^2 \gg p^2 \qquad (128.11)$$

からくる．実際に，関数 $D_{\nu\rho}(p_2-p_1)$ の引数中で p_2 を省略したのち，d^4p_1 についての積分は（128.9）におけるのと同じになり $\ln p_2^2$ を与える．これにつづく d^4p_2 についての積分は対数的性質をもち，平方 $\ln^2(p_2^2/m^2)$ になる．D－関数に対してランダウ・ゲージをとれば両方の積分から対数項が落ちる．

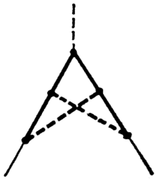
このような事情は，骨組み図形

1）G^{-1} に対する補正は，恒等式（105.8）を使って補正 $\Gamma^{(1)}$ から求められ，当然のことながら§116の結果と一致することがわかる．



(128.12)

に含まれるすべての図形に対しても成り立つ．交叉する光子線をもつ形の図形，たとえば骨組み図形



(128.13)

に現われる図形 ((103.11) 参照) は一般にはどんなゲージでも対数の必要な乗冪をもつ項は含まない (このときは，積分が完全な対数積分になるような変数値領域を分離することはできない)．

これらの考察 (および Γ の k についての冪展開のつぎの項に対する同様な考察) は，ランダウ・ゲージでは必要な対数の乗冪をもつ $\mathcal{G}$ および Γ の補正は生じないこと，したがって(128.1) は条件 (128.3) のときにも成り立つことを裏付けている．

偏りの演算子 (128.1) に対応する関数 $\mathcal{D}(k^2)$ はつぎの形になる．

$$\mathcal{D}(k^2)=\frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{|k^2|}{m^2}}. \tag{128.14}$$

条件 (128.3) のために，この式を α について冪展開することは必要ではない[1]．

対数 $\ln(|k^2|/m^2)$ の値を $3\pi/\alpha$ に近づけたときの $\mathcal{D}$ の増大に注目しよう．この増大には公式 (128.14) の $|k^2|$ の大きい側での適用可能性の限界が関係している．実際に，この公式の導き方は図形 (128.13) (および太い光子線がもっと多数ある図形) を図形 (128.12) にくらべて無視することに基づいている．このような線を付け加えるごとに，図

1) この公式は伝播関数と頂点部の関数の性質からもまた導くことができ，量子電気力学のくりこみ可能性を示している．エリ・デ・ランダウ "場の量子論について" (論文集《ニールス・ボーアと物理学の発達》のなかの論文，1955；論文集II《ナウカ出版所》，1969)；エヌ・エヌ・ボゴリューボフ，デ・ヴェ・シルコフ，ЖЭТФ, **30**, 77, 1956．これらの性質の使用に基づいた方法 (くりこみ群の方法と呼ばれる) の発達については，エヌ・エヌ・ボゴリューボフ，デ・ヴェ・シルコフの著書《場の量子論入門》に与えられている (1957)．

形には因子 $e^2\mathcal{D}$ が付け加えられる．$\mathcal{D}$ は正確な伝播関数である．このとき小さいパラメータの役割を，$\alpha=e^2$ の代りに

$$\frac{\alpha}{1-\dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\dfrac{|k^2|}{m^2}}$$

という量が果たしている．したがって上記の省略が許されるためには条件

$$1-\frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{|k^2|}{m^2}\gg\alpha \tag{128.15}$$

が成り立つことが必要である．

$|k^2|$ の増大につれて，この不等式の左辺の大きさの程度が α と同じくらいになるとき，小さいパラメータは実質上，理論からは消えてしまう．このようにして，弱い相互作用の理論としての量子電気力学の論理的不完全性についての重要な結論に到達する．特に，現存の理論のすべての方法はもちろん電磁的相互作用を小さい摂動とみなしうることと関係している．

このような理論は，非常に大きいエネルギーの領域では《強い結合》の理論で補う必要がある．しかしながら，現存の記述法の枠内ではそれは不可能である．したがって，量子電気力学は《弱い結合》の理論として不完全なばかりでなく，原理的には，論理的に閉じた物理理論ではないと考える十分な根拠がある．

つぎのようにすれば公式 (128.14) と関係して生じる困難の解析からもこれらの結論に到達する．それにはこれを導く際に《一歩一歩の》くりこみではなくて，物理的電荷 e が正しい測定値になるように，あらかじめ電子の《裸の》電荷 e_c を導入し，あとでこれを選ぶようにする方法でくりこみを行なう (§107)．上記のようにして積分が補助的上限 Λ^2 で《切断される》と，裸の電荷はこれの関数 $e_c=e_c(\Lambda)$ になり，$\Lambda\to\infty$ の極限に移行すれば結論が得られる．

このような問題の扱い方のとき，偏りの演算子は

$$\mathcal{P}(k^2)=-\frac{e_c^2}{3\pi}k^2\ln\frac{\Lambda^2}{|k^2|}$$

(e の代りに e_c を入れた式 (128.8)) となり，これと対応して

$$\mathcal{D}(k^2)=\frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{1+\dfrac{e_c^2}{3\pi}\ln\dfrac{\Lambda^2}{|k^2|}} \tag{128.16}$$

となる．つぎの条件で物理的電荷 e を決める．すなわち

$$e_c^2 \mathscr{D}(k^2) \to \frac{4\pi}{k^2} e^2 \qquad (k^2 \to \sim m^2)$$

である．そして

$$e^2 = \frac{e_c^2}{1 + \frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}, \tag{128.17}$$

あるいは

$$e_c^2 = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}} \tag{128.18}$$

を得る．

しかしながら，この公式はそれ自身では $\Lambda \to \infty$ の極限移行を可能にはしない．(128.18) から (e^2 の値が与えられたときに) Λ が大きくなるにつれて e_c^2 が大きくなることがわかる．そして $e_c^2 \sim 1$ のときすでに，この式はその適用性を失っている．それは，この導き方が，《裸の》相互作用への摂動論の適用可能の条件としての前提

$$e_c^2 \ll 1$$

に基づいているからである．

しかしながら，この困難はつぎのような考察によって避けることができる（エリ・デ・ランダウ，イ・ヤ・ポメランチュク，1955）．

Λ^2/k^2 がかなり大きくて

$$\frac{e_c^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{k^2} \gg 1$$

であり，と同時にまた $e_c^2 \ll 1$ としよう．このとき (128.16) で分母のなかの1を省略することができる．

$$\mathscr{D}(k^2) = \frac{12\pi^2}{k^2 e_c^2 \ln^2 \frac{\Lambda^2}{|k^2|}}. \tag{128.19}$$

したがって

$$e^2 = \frac{3\pi}{\ln^2 \frac{\Lambda^2}{m^2}} \tag{128.20}$$

である．

電磁場の 4-ポテンシャルの演算子 A^μ の代りに，4-ベクトル $\mathfrak{A}^\mu = e_c \mathrm{A}^\mu$ を導入しよう．このとき相互作用のハミルトニアン $\mathrm{H}_{相互}$ は裸の電荷 e_c を含まないが，(A^μ に

ついて２次形式の）自由場のハミルトニアン H_0 は分母に e_c^2 を含んでいる．$\mathcal{D}(k^2)$ が A^μ を使って定義されたのと同様に $\mathfrak{A}^\mu$ を使って定義された $\mathfrak{D}(k^2)$ は

$$\mathfrak{D}(k^2)=\frac{1}{e_c^2}\mathcal{D}(k^2)=\frac{12\pi^2}{k^2\ln\dfrac{\Lambda^2}{|k^2|}}$$

となる．この式は e_c を含まない．これは e_c に依存するハミルトニアン $H=H_0+H_{相互}$ のなかで，H_0 の項の無視に対応することを意味している．もしも $e_c^2\ll 1$ のとき（Λ が大きく）すでに $H_{相互}$ とくらべて H_0 を無視することが可能ならば，e_c^2 が小さい値でないときはなおさら正しいと考えるのが自然であろう．

このようにして公式 (128.19) は，(128.20) とともに条件 $e_c^2\ll 1$ に束縛されることはなくなり，$\Lambda\to\infty$ の極限移行が可能になる．そしてこのとき，関数 $e_c(\Lambda)$ の形に依存しないで $e^2\to 0$ となる．このように物理的電荷を《０にすること》は，くりこみの厳密な実行が不可能であることを意味している．

もちろん，上述の考察は，この結果の厳密な証明とみなしてはならない．しかしながら，それは現存する量子電気力学に起こりうる内的非一貫性を十分に示している．

と同時に，量子電気力学では上記の困難はただ純理論的価値しかもちえないことを強調しておく必要がある．それは，なんら現実的重要性をもたない空想的巨大エネルギー $\sim me^{3\pi/2\alpha}$ のときに生じる．実際にはとうのむかしに電磁的相互作用は，強い相互作用と《絡まり》，その結果電気力学はその意味を失ってしまうことを期待してよい．

§129.　2重対数項の頂点演算子からの分離

$(\alpha L)^n$（ここで L は大きい対数である）の補正は，前節の末尾で指摘されているように，空想的エネルギーのときにのみ重要でありえて，ただ理論的価値だけをもっている．しかし，現実の散乱過程の振幅のなかには $(\alpha L^2)^n$ の形の巨大な補正項もまた現われる．α の乗冪ごとに対数の２乗を含むような項を**2重対数項**と呼ぶ．

(114.21) により電子形状因子に対する最初の補正，すなわち外場内の電子散乱の振幅は，運動量転移の平方 $t=q^2$ の値が大きいときに

$$\frac{\alpha}{4\pi}\ln^2\frac{|t|}{m^2}\qquad(129.1)$$

の大きさの項を含む．摂動論の適用可能の条件はこの量が小さいことを要求する．これはエネルギーが

$$\varepsilon \sim \sqrt{t} \sim m e^{\sqrt{\pi/\alpha}} \tag{129.2}$$

のときに破られる．このエネルギーは非常に大きいけれども，与えられた条件 (128.3) よりははるかに小さい．この制限からは解放されるとしよう．そうすると条件

$$\alpha \ln^2 \frac{\varepsilon}{m} \lesssim 1 \tag{129.3}$$

のときに便利な公式が得られる．

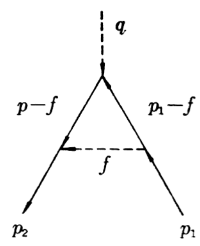
まず第一に，この条件のときに1重対数補正は

$$\sim \alpha \ln \frac{\varepsilon}{m} \lesssim \sqrt{\alpha} \ll 1$$

であり，落としてよいことを指摘しよう．他方一般には $\mathcal{G}$ および $\mathcal{D}$ には2重対数補正はないので，これらの関数を単にその非摂動値 G および D に等しいと置いてよいことを意味している．

頂点演算子 Γ の計算には，無限図形列から生じる2重対数項の和が必要になる．この問題は次節で詳細に述べられる．2重対数項を個々のファインマン積分から分離する方法を，そのなかの全変数についての積分の実行まで含めて説明しよう（ヴェ・ヴェ・スダコフ，1956）．

図形 (114.1) によって記述される，頂点演算子に対する（α について）1次の補正を考察しよう．これは，ここでは（変数を変換して）



(129.4)

の形に描いた方がつごうがよい．あるいは解析的に

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{ie^2}{4\pi^3} \int \frac{\gamma^\nu(\hat{p}_2 - \hat{f} + m)\gamma^\mu(\hat{p}_1 - \hat{f} + m)\gamma_\nu d^4 f}{[(p_2 - f)^2 - m^2 + i0][(p_1 - f)^2 - m^2 + i0][f^2 + i0]} \tag{129.5}$$

となる．いま

$$|q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2 \tag{129.6}$$

であると仮定しよう．ここで端 p_1, p_2 は物理的であっても仮想的であってもよい．(129.6) から

$$|p_1p_2| \approx \frac{1}{2}|q^2| \gg p_1^2, p_2^2, m^2 \tag{129.7}$$

であることが出る．すなわち，4-ベクトル p_1, p_2 は平方が小さいときにでも大きい成分をもっている．この事情は 4-次元の計量が擬ユークリッドであるために可能である．もちろん，2重対数項は条件 (129.6) のときに起こる．

先へいってわれわれは，d^4f についての積分のときに f の比較的に小さい値が重要であることを見るだろう．したがって，被積分式の分母中の f は無視することができる．そのあとで $\Gamma^{(1)}$ は

$$\Gamma^{\mu(1)} = -\frac{ie^2}{4\pi^3}\gamma^\nu(\hat{p}_2+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1+m)\gamma_\nu I_1 \tag{129.8}$$

の形になる．ここで

$$I_1 = \int\frac{d^4f}{[(p_2-f)^2-m^2+i0][(p_1-f)^2-m^2+i0][f^2+i0]} \tag{129.9}$$

である．

事実，もしも Γ が図形のなかではいつも行列 $(\hat{p}_2+m)$ と $(\hat{p}_1+m)$ がかかって

$$(\hat{p}_2+m)\Gamma(\hat{p}_1+m) \tag{129.10}$$

の形で現われることを考慮すれば，(129.8) のなかの行列因子は簡単にすることができる．実際に，もしも p_1 および p_2 が仮想的ならば，これらの因子は $G(p_1)$ および $G(p_2)$ から出てきている．もしも線が現実の電子に対応するならば，Γ には $\bar{u}_2$ および u_1 が掛かってくる．そしてディラックの方程式により

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_2\frac{\hat{p}_2+m}{2m},\quad u_1 = \frac{\hat{p}_1+m}{2m}u_1$$

となる．行列因子の順序を変え，条件 (129.7) にしたがって，そのつど平方 p_1^2，p_2^2，m^2 を p_1p_2 にくらべて無視して

$$(\hat{p}_2+m)\Gamma^{\mu(1)}(\hat{p}_1+m) \approx -\frac{ie^2}{\pi^3}(p_1p_2)(\hat{p}_2+m)\gamma^\mu(\hat{p}_1+m)I_1$$

を得る．したがって，最終的に $\Gamma^{(1)}$ をつぎの形に表わすことができる．

$$\Gamma^{\mu(1)} = \frac{ie^2}{2\pi^3}\gamma^\mu tI_1. \tag{129.11}$$

ここで

$$t = q^2 \approx -2(p_1p_2) \tag{129.12}$$

である．積分 I_1 は f が大きいときに収束し，したがってこれ以上正則化の必要はない．

これから先の計算の基本的な点は，より便利な新しい積分変数を導入することにある．f を p_1, p_2－平面に関する接線および法線成分に分ける．すなわち

$$f = up_1 + vp_2 + f_\perp \equiv f_\parallel + f_\perp, \tag{129.13}$$

$$f_\perp p_1 = f_\perp p_2 = 0. \tag{129.14}$$

新変数として，係数 u，v および平方

$$\rho = -f_\perp^2 \tag{129.15}$$

を選ぼう．条件 (129.7) から，p_1, p_2－平面上の計量は擬ユークリッドである．したがって，時間軸をこの面内に選び，$f_\perp$ が空間類似 4－ベクトルで $\rho > 0$ になるようにすることができる．

かりに 4－ベクトルの p_1, p_2－平面内の成分を添字 0，x で，この面に垂直な成分を添字 y，z で表わそう．4－体積要素

$$d^4f = d^2f_\perp d^2f_\parallel$$

を新変数に変換するために

$$d^2f_\perp = |f_\perp|\, d|f_\perp|\, d\varphi = \frac{1}{2}\, d\rho\, d\varphi \to \pi\, d\rho$$

と書く ((129.9) の被積分式が φ に依存しないことを考慮した)．さらに

$$d^2f_\parallel = \left|\frac{\partial(f_0, f_x)}{\partial(u, v)}\right| du\, dv = |p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x}|\, du\, dv \approx \frac{1}{2}|q^2|\, du\, dv$$

である．実際に平方 p_2^2 は小さいので $p_{2x}^2 \approx p_{20}^2$ が成り立つ．したがって

$$(p_{10}p_{2x} - p_{20}p_{1x})^2 \approx (p_{10}p_{20} - p_{2x}p_{1x})^2 = (p_1p_2)^2 = \left(\frac{q^2}{2}\right)^2$$

である．このようにして

$$d^4f = \frac{1}{2}|t|\, du\, dv\, d^2f_\perp \longrightarrow \frac{\pi}{2}|t|\, du\, dv\, d\rho. \tag{129.16}$$

これから先の計算は，量 p_1^2，p_2^2，m^2 のあいだの関係に依存する．われわれは二つの場合を考察しよう．

A. 仮想的電子線の場合

運動量 p_1，p_2 が仮想的電子に対応するとしよう．このとき

$$|p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2 \tag{129.17}$$

である．

この場合には，2重対数の式へ導くような主要な積分領域はつぎの不等式によって決定される領域である．

$$0<\rho\ll|tu|,|tv|,\qquad \left|\frac{p_1^2}{t}\right|\ll|v|\ll1,\quad \left|\frac{p_2^2}{t}\right|\ll|u|\ll1. \tag{129.18}$$

これに対応して (129.9) の被積分式の分母のなかでは，m^2，p_1^2，p_2^2，f^2 を (p_1f) あるいは (p_2f) にくらべて無視することができる．したがって

$$I_1=\int\frac{d^4f}{2(p_2f)2(p_1f)(f^2+i0)} \tag{129.19}$$

となる．p_1f，p_2f，f^2 という量に対しては

$$f^2=(up_1+vp_2)^2-\rho\approx-tuv-\rho,$$
$$2(p_1f)=2p_1(up_1+vp_2)\approx-tv,$$
$$2(p_2f)\approx-tu$$

が成り立ち

$$I_1=-\frac{\pi}{2|t|}\int\frac{d\rho}{\rho+tuv-i0}\frac{du}{u}\frac{dv}{v} \tag{129.20}$$

となる．

条件 (129.18) にしたがって，$d\rho$ についての積分は0から $|tv|$ あるいは $|tu|$ のなかの小さい方の限界まで行なわれ

$$\int_0^{\min\{|tu|,|tv|\}}\frac{d\rho}{\rho+tuv-i0}=\ln\min\left\{\frac{1}{|u|},\frac{1}{|v|}\right\}+\begin{cases} i\pi & (tuv<0)\\ 0 & (tuv>0)\end{cases} \tag{129.21}$$

を与える．dv についての対数積分は -1 から $-|p_1^2/t|$ までと，$|p_1^2/t|$ から1までの限界内で行なわれる（du についても同様である）．(129.21) を (129.20) に代入するとき，第1項の $du\,dv$ についての積分は，被積分式が奇関数であるために0になる．第2項の積分は，u と v の値が（$t<0$ のときは）同符号の，あるいは（$t>0$ のときは）異符号の区間について行なわれる．どちらの場合も $v>0$ の領域と $v<0$ の領域は（du について積分したあとでは）同じ寄与をする．その結果

$$I_1=\frac{i\pi^2}{2t}2\int_{|p_1^2/t|}^1\frac{du}{u}\int_{|p_2^2/t|}^1\frac{dv}{v}=\frac{i\pi^2}{t}\ln\left|\frac{t}{p_1^2}\right|\ln\left|\frac{t}{p_2^2}\right| \tag{129.22}$$

となる（符号は t の符号と一致する）．

最後に，(129.11) に代入して，最終的に

$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1; q) = -\frac{\alpha}{2\pi}\gamma^\mu \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|, \tag{129.23}$$
$$|q^2| \gg |p_1^2|, |p_2^2| \gg m^2$$

を得る．

B.　物理的電子端の場合

今度は運動量 p_1，p_2 が現実の電子に対応するとしよう．したがって

$$p_1^2 = p_2^2 = m^2. \tag{129.24}$$

この場合，つぎの積分領域が重要である．

$$0 < \rho \ll |tu|, |tv|, \quad 0 < |v|, |u| \ll 1. \tag{129.25}$$

$p_1^2 - m^2 = p_2^2 - m^2 = 0$ であるから，p_1^2 と p_2^2 を $p_1 f$ あるいは $p_2 f$ にくらべて無視して，ふたたび積分 (129.9) は (129.19) の形になる．しかしながら，この場合に現われる赤外発散を消去するために，さらに光子伝播関数のなかに有限な光子質量 $\lambda \ll m$ を導入する必要がある（§114 参照）．すなわち

$$I_1 = \int \frac{d^4 f}{2(p_1 f)2(p_2 f)(f^2 - \lambda^2 + i0)} \tag{129.26}$$

となる．さらにここでは

$$f^2 \approx -tuv - \rho,$$
$$2p_1 f \approx -tv + 2m^2 u,$$
$$2p_2 f \approx -tu + 2m^2 v$$

が成り立っている．したがって

$$I_1 = -\frac{\pi}{2|t|}\int \frac{d\rho}{\rho + tuv + \lambda^2 - i0}\,\frac{du}{u - \tau v}\,\frac{dv}{v - \tau u} \tag{129.27}$$

となる．ここで $\tau = 2m^2/t \ll 1$ である．

$d\rho$ についての積分（(129.21) と同様）のあとで

$$I_1 = -\frac{i\pi^2}{2|t|}\iint \frac{du}{u - \tau v}\,\frac{dv}{v - \tau u}$$

となる．このとき積分は $tuv + \lambda^2 < 0$ の条件のもとで行なわれる．$v < 0$ および $v > 0$ の領域はふたたび同じ寄与をする．du についての積分のあとで

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{t}\int_0^1 dv \int_{\delta/v}^1 \frac{du}{(u - \tau v)(v - \tau u)} = \frac{i\pi^2}{t}\int_0^1 \ln\frac{\tau\delta - v^2}{(\delta - \tau v^2)(\tau - v)}\,\frac{dv}{v} \tag{129.28}$$

となる．ここで $\delta = \lambda^2/t \ll \tau$ であり，$\tau \ll 1$ であることは勘定に入れてある．

積分 (129.28) で v の値の二つの領域が 2 重対数式へと導いている．すなわち

$$\text{I)}\qquad \tau \ll v \ll 1,$$

$$\text{II)}\qquad \sqrt{\tau\delta} \ll v \ll \sqrt{\delta/\tau}$$

である．各領域で適当な省略を行ない

$$I_1 = \frac{i\pi^2}{2t}\left(\ln^2 \frac{|t|}{m^2} + 4\ln\frac{|t|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right) \tag{129.29}$$

を得る．ここで第1項は領域Iから，第2項は領域IIから出ている．

(129.11) に代入し，最終的には

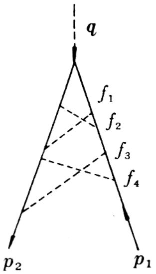
$$\Gamma^{\mu(1)}(p_2, p_1 ; q) = -\frac{\alpha}{4\pi}\gamma^\mu\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right), \quad |q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2 \tag{129.30}$$

を得る．これは (114.21) と一致している．

§130.　頂点演算子の2重対数漸近式

前節で計算された補正 $\Gamma^{(1)}$ が1の程度になるときには，頂点演算子の計算は，α についてすべての次数の2重対数の項の無限級数の和を要求する．この問題はつぎに述べる事情から解けることがわかる．すなわち，このような項は決まった形の図形から出てきており，異なる次数の図形は簡単な関係式により，互いに結びつけられているという事情である．

先へいってわかるように，2重対数項はつぎの形のすべての図形から出ている．つまり



(130.1)

等である．ここでは各光子線は右と左の電子線をつないでいる．このときこれらは互いにどんな形で交わってもよい．

光子線を，たとえば右の光子端の順序にしたがって $f_1, f_2, \cdots$ と名付ける．このとき同じ次数の異なる図形は，左の光子端が入れ換っている点が互いに異なっている．おのおの

のファインマン積分では，積分 (129.5) で行なわれたような省略を行なう．そのあとで分子は (129.11) を導くときと同じ変形を行なう．その結果 n 個の光子線をもち，Γ のなかで$\sim\alpha^n$ の項を形成するすべての図形の和はつぎの形に表わされる．

$$\Gamma^{\mu(n)}=\gamma^{\mu}\left(\frac{i\alpha}{2\pi^3}t\right)^n I_n, \tag{130.2}$$

$$I_n=\sum_{2\text{の交換}}\int\frac{d^4f_1\cdots d^4f_n}{2(p_1f_1)\,2\,(p_1f_1+p_1f_2)\cdots 2(p_1f_1+\cdots+p_1f_n)\,2\,(p_2f_1)\cdots 2\,(p_2f_1+\cdots+p_2f_n)\,f_1^2f_2^2\cdots f_n^2} \tag{130.3}$$

ここで和は，積 p_2f_k のなかの運動量 f_k のすべての添字の交換について行なう（分母の $i0$ と λ^2 の項は簡単のために落とした）．

もし和 (130.3) のなかで，ある方法により積 p_1f_k のなかの因子 f_k の添字をとりかえればこれはただ運動量の名前の付けかえに帰し，I_n の値を変えない．したがって，(130.3) の和は，積 p_2f_k のなかと同様に p_1f_k のなかの因子のすべての交換の和にまでひろげて，そのあとで結果を $n!$ で割ればよい．すなわち

$$\sum_{2\text{の交換}}\to\frac{1}{n!}\sum_{1\text{の交換}}\ \sum_{2\text{の交換}}$$

である．

ここで重要な公式

$$\sum_{\text{交換}}\frac{1}{a_1(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2+\cdots+a_n)}=\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n} \tag{130.4}$$

が使われる．ここで和は添字 $1,2,\cdots,n$ の交換について行なう[1]．この公式を2重に適用して，積分の和は (129.19)（あるいは (129.26)）の形の n 個の同じ積分の積にまとめられる．したがって

$$I_n=\frac{1}{n!}I_1^n. \tag{130.5}$$

これを (130.2) に代入し，$\Gamma^{(n)}$ をすべての $n=0,1,2,\cdots$ について加え，最終的に

$$\Gamma^{\mu}(p_2,p_1;\,q)=\gamma^{\mu}\exp\left(\frac{ie^2}{2\pi^3}tI_1\right) \tag{130.6}$$

を得る．

---

1) $n=2$ のときこの公式は明らかである．そしてこれの一般化は n から $n+1$ の帰納法によって得られる．

実際には，軟光子放出確率に対する公式 (95.14) を導くときに，この公式にしたがった因数分解をすでに使ったことを思い起こそう．

特に，ここで (129.22) から I_1 を代入し，仮想的光子端をもつ頂点演算子の 2 重対数漸近式を得る．

$$\Gamma^{\mu}(p_2, p_1; q) = \gamma^{\mu} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi} \ln\left|\frac{q^2}{p_1^2}\right| \ln\left|\frac{q^2}{p_2^2}\right|\right\}, \qquad (130.7)$$
$$|q^2| \gg |p_1^2|, \quad |p_2^2| \gg m^2$$

(В. В. Судаков, 1956).

現実の光子端の場合には，(129.29) から I_1 を代入して頂点演算子に対する漸近式を得る．

$$\Gamma^{\mu}(p_2, p_1; q) = \gamma^{\mu} \exp\left\{-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\}, \qquad (130.8)$$
$$|q^2| \gg p_1^2 = p_2^2 = m^2.$$

この Γ^{μ} と非摂動の値 γ^{μ} とを区別している因子は，外場による電子散乱の振幅と，ボルン近似の差との違いでもある．したがって，散乱断面積は

$$d\sigma = d\sigma_{ボルン} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\pi}\left(\ln^2\frac{|q^2|}{m^2} + 4\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{m}{\lambda}\right)\right\} \qquad (130.9)$$

となる．

しかしながら赤外発散の消去のためには，この式には，ある小さな ω_{max} を越えないエネルギーをもついろいろな数の軟光子放出の確率の和，すなわち

$$1 + \int_0^{\omega_{max}} dw_{\omega} + \frac{1}{2!}\int_0^{\omega_{max}} dw_{\omega_1}\int_0^{\omega_{max}} dw_{\omega_2} + \cdots = \exp\left\{\int_0^{\omega_{max}} dw_{\omega}\right\} \qquad (130.10)$$

を掛ける必要がある ((119.2) 参照)．指数中の積分は (117.14) ($d\sigma_{弾}$ のなかに出てくる因子) からもってくる．その結果，最終的にエネルギー ε をもった電子の，運動量転移が大きい場合の，散乱断面積に対するつぎのような漸近式が得られる．すなわち

$$d\sigma = d\sigma_{ボルン} \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\pi}\ln\frac{|q^2|}{m^2}\ln\frac{\varepsilon}{\omega_{max}}\right\}, \qquad (130.11)$$
$$|q^2| \gg m^2, \quad \frac{\alpha}{2\pi}\ln^2\frac{\varepsilon}{m} \sim 1$$

(А. А. Абрикосов, 1956)．この式の展開の (α について) 1 次の項は，当然公式 (119.12) と一致する．

§131.　ミューオンによる電子散乱振幅の 2 重対数漸近式

振幅の漸近式中の 2 重対数項は，電子の外場による散乱に対してだけでなく，2 粒子性

散乱過程に対しても現われる.

この種の例として負ミューオンによる電子散乱を考察しよう. このとき後方散乱, すなわち $\theta=\pi$ の散乱に限ることにする (В. Г. Горшков, В. Н. Грибов, Л. Н. Липатов, Г. В. Фролов, 1967). この過程は二つの観点から非常に簡単である. 第1に, 2粒子が同一でないために交換図形が存在しない. 第2に, 後方散乱のときには軟光子放出が強く抑制され, その結果赤外発散は生じない. 実際に, (95.8) にしたがって軟光子放出の断面積は

$$d\sigma=\alpha\left[\left(\frac{\boldsymbol{v}'_e}{1-\boldsymbol{v}'_e\boldsymbol{n}}+\frac{\boldsymbol{v}'_\mu}{1-\boldsymbol{v}'_\mu\boldsymbol{n}}-\frac{\boldsymbol{v}_e}{1-\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{n}}-\frac{\boldsymbol{v}_\mu}{1-\boldsymbol{v}_\mu\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{n}\right]^2\frac{d\omega\, do_n}{4\pi^2\omega}\,d\sigma_{\text{弾}} \tag{131.1}$$

となる. ここで $\boldsymbol{v}_e$, $\boldsymbol{v}_\mu$ および $\boldsymbol{v}'_e$, $\boldsymbol{v}'_\mu$ は, 衝突前後の粒子の速度である. 超相対論的場合には, 運動量が等しいことは速度が等しいことと同等であり, その精度では後方散乱の場合に重心系では

$$\boldsymbol{v}_e=-\boldsymbol{v}_\mu=-\boldsymbol{v}'_e=\boldsymbol{v}'_\mu$$

が成り立つ. その結果, (131.1) は0になる.

もしも今考察される散乱程過が反応の s-チャネルに対応すれば, t-チャネルでは電子-陽電子対の $\mu^+\mu^-$ 対への転換になる. このチャネルでは条件 $\theta=\pi$ は, e^- と μ^- (および e^+ と μ^+) の運動方向が一致することを意味している. このチャネルでの制動輻射の抑制は, 特別に直観的な原因をもっている. どちらの符号の電荷の運動方向も一般に変わらないからである.

輻射断面積の主な項が互いに打ち消しあうので, その漸近式には2重対数補正は生じない. したがって (同じ2重対数精度では) 散乱振幅のなかの仮想的光子の運動量についての積分の際に赤外発散は起こらない.

不変変数

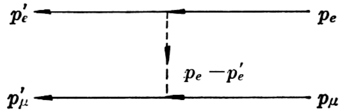
$$s=(p_e+p_\mu)^2,\quad t=(p_e-p'_e)^2,\quad u=(p_e-p'_\mu)^2$$

を使ってこの過程を記述すれば, 超相対論的な場合の後方散乱は

$$s=-t\gg m_\mu^2,\quad u=0 \tag{131.2}$$

の値に対応する.

ミューオンによる電子の散乱は摂動論の (α についての) 1次近似では, 図形



(131.3)

で記述される．対応する振幅は

$$M_{fi}^{(1)} = \frac{4\pi\alpha}{t}(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu u^{(\mu)})(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma_\nu u^{(e)}) \tag{131.4}$$

である．この式で極限の場合 (131.2) への移行は，行列の 4-ベクトル γ^ν を，p_e, p'_e-平面に垂直なその投影 $\gamma^\nu_\perp$ で置き換えることによって実現される（あるいは，p_μ, p'_μ-平面でも同じである．それは超相対論的な後方散乱の場合には $p_e \approx p'_\mu$，$p'_e \approx p_\mu$ であるからである．実際に，平面 p_e，p'_e に平行な成分は行列

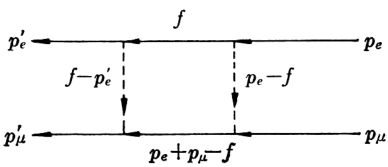
$$\frac{1}{\sqrt{s}}(\hat{p}_e + \hat{p}'_e), \quad \frac{1}{\sqrt{s}}(\hat{p}_e - \hat{p}'_e)$$

である（一番目は γ^0 と一致し，二番目は $\boldsymbol{n}_e\boldsymbol{\gamma}$ に一致する．ここで $\boldsymbol{n}_e$ は $\boldsymbol{p}_e$ の方向の基底である）．双スピノール $u^{(e)}$ に対するディラック方程式を使って

$$(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\nu_\parallel u^{(\mu)})(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma_{\nu\parallel} u^{(e)}) \sim \frac{1}{s}$$

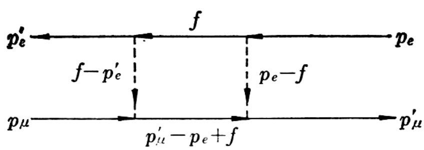
であることがわかる．したがってこれらの項は落とすことができる．

つぎの近似では図形



(131.5)

と，《交叉した》光子線をもつ図形とが付け加えられる．後者は (131.5) と，実線のなかの一つの向きだけ異なった形



(131.6)

に描くとつごうがよい．

対応する積分の研究から，両方の図形とも，仮想的《軟》光子の領域

$$|(f-p_e)^2| \ll m_e^2 \quad あるいは \quad |(f-p'_e)^2| \ll m_e^2$$

から2重対数の寄与があることがわかる．これらの寄与は積分の赤外発散と結びついていて，前に述べたとおり，この場合にはもちろん互いに打ち消しあっている．しかしながら，図形 (131.6) のなかではまだ大きい運動量の領域，すなわち $|f^2| \gg m_\mu^2$ からの2重対数の寄与も存在する．もちろんこの寄与は計算しなければならない．

図形 (131.6) は積分

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{\pi^2}\int \frac{(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu(\hat{f}+m_e)\gamma_\lambda u^{(e)})(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda(\hat{f}+m_\mu)\gamma_\nu u^{(\mu)})}{(p'_e-f)^2(f^2-m_e^2)(f^2-m_\mu^2)(p_e-f)^2}\, d^4f \qquad (131.7)$$

に対応する（ここですでに，$p_e \approx p'_\mu$ であることは勘定に入れてある）．ふたたび

$$f = up_e + vp'_e + f_\perp \qquad (131.8)$$

と置く ((129.13) 参照)．2重対数の寄与は不等式

$$|su|, |sv| \gg \rho \gg m_\mu^2,$$
$$\frac{m_\mu^2}{s} \ll |u|, |v| \ll 1 \qquad (131.9)$$

によって決定される領域からくる．ここで $\rho = -f_\perp^2$ である．4-ベクトル $f_\perp$ は $f_\perp p_e = f_\perp p'_e = 0$ であるように決定される．これから，この場合（後方散乱）には重心系で $f_\perp^0 = 0$，したがって $\rho = \boldsymbol{f}_\perp^2$ であることが出てくる．

積分 (131.7) の分子では m_e，m_μ と u あるいは v をもつすべての項を無視することができる．分子のなかの因子 u あるいは v は，分母のなかの対応する極と約される（下記参照）．その結果求める対数の平方は現われない．

$$(p'_e-f)^2 \approx tu \approx -su, \quad (p_e-f)^2 \approx -sv, \quad f^2 \approx suv-\rho$$

であることを考慮し，(129.16) にしたがって積分要素 d^4f を変換し，積分をつぎの形に書き直す．

$$M_{fi}^{(2)} = -\frac{i\alpha^2}{2\pi^2}\int \frac{(\overline{u}^{(e)\prime}\gamma^\nu\hat{f}_\perp\gamma_\lambda u^{(e)})(\overline{u}^{(\mu)\prime}\gamma^\lambda\hat{f}_\perp\gamma_\nu u^{(\mu)})}{su\cdot sv(suv-\rho+i0)^2}\, s\,du\,dv\,d^2f_\perp.$$

この先，被積分式は $\boldsymbol{f}_\perp$ の方向について平均し，((131.4) におけるのと同じ理由にしたがって) γ^ν，γ^λ を $\gamma_\perp^\nu$，$\gamma_\perp^\lambda$ で置き換えることにより変形する．簡単な変形ののち

$$M_{fi}^{(2)} = M_{fi}^{(1)} J^{(1)} \qquad (131.10)$$

を得る．ここで

$$J^{(1)} = -i\frac{\alpha}{4\pi^2}\int\frac{\rho\, du\, dv\, d\rho}{uv(suv-\rho+i0)^2}$$

である．最後に分子で恒等的に $\rho=(\rho-suv)+suv$ と置き，第2項は落とすことができる．第2項は単純な極と打ち消しあい，そのため2重対数の寄与は与えない．このようにして

$$J^{(1)} = -\frac{i\alpha}{4\pi^2}\int\frac{du\, dv\, d\rho}{uv(\rho-suv-i0)} \tag{131.11}$$

になる．

この積の形は（129.20）と一致している．したがって，$d\rho$ についての積分は同じ方法で行なわれる．しかしながら，今は $\rho \gg m_\mu^2$ であるから（$suv>0$ の代りに）

$suv \gg m_\mu^2$ という条件が生じる．結果として

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}\int\frac{du\, dv}{uv} \tag{131.12}$$

となる．このとき積分領域は不等式

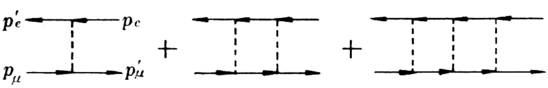
$$\frac{m_\mu^2}{s} < u, \quad v<1, \quad suv > m_\mu^2$$

で限られる（対数精度での計算の際には，強い不等号 ≫ は単純な不等号 ＞ で置き換えられる）．直接の計算は

$$J^{(1)} = \frac{\alpha}{4\pi}\ln^2\frac{s}{m_\mu^2} \tag{131.13}$$

を与える．

摂動論のさらに高次の近似で，われわれにとって重要な寄与 $\sim\alpha^n\ln^{2n}s$ は，（131.6）に類似の《横木》がたくさんある梯子型の図形から得られる．したがって，散乱振幅の全2重対数漸近式は無限の和

$iM_{fi} =$ 

$+\ \cdots$　（131.14）

によって与えられる[1)]．

この和の各項の一般的な形を決めるために，さらに3次近似の図形（級数（131.14）の

1）この級数はベーテ＝サルピーターの方程式にまとめられる（§122）．これを解いて M_{fi} を求めることができる．しかしながら，これから述べる計算法の方がはるかに便利である．そこでは和をとる前に各項ごとに縮約が行なわれる．

第3項）を考察しよう．これに対応する積分は

$$M_{fi}^{(3)} = M_{fi}^{(1)} J^{(2)}, \quad J^2 = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 v_1 (u_1 + u_2)(v_1 + v_2)} \tag{131.15}$$

の形にもってくることができる．積分領域は

$$\frac{m_\mu^2}{s} < u_{1,2}, v_{1,2} < 1, \quad su_1 v_1, su_2 v_2 > m_\mu^2$$

である．この積分の2重対数部分は，積分変数にさらにつぎの条件を課することによって分離することができる[1]．

$$v_2 \gg v_1, \quad u_2 \gg u_1. \tag{131.16}$$

このとき

$$J^{(2)} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int \frac{du_1\, dv_1\, du_2\, dv_2}{u_1 u_2 v_1 v_2} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int d\xi_1\, d\eta_1\, d\xi_2\, d\eta_2$$

である．ここで

$$\xi_i = \ln \frac{su_i}{m_\mu^2}, \quad \eta_i = -\ln v_i$$

であり，積分領域は不等式

$$\xi_1 > \eta_1, \quad \xi_2 > \eta_2, \quad \sigma > \xi_2, \eta_2 > 0, \quad \sigma = \ln \frac{s}{m_\mu^2}$$

で決定される．

同様にして級数の n 番目の項は $M_{fi}^{(n)} = M_{fi}^{(1)} J^{(n)}$ の形に表わされる．ここで

$$J^{(n)}(\sigma) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int d\xi_1\, d\eta_1 \cdots d\xi_n\, d\eta_n \tag{131.17}$$

で，この積分領域は

$$\xi_i > \eta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \sigma > \xi_n, \eta_n > 0 \tag{131.18}$$

である．全散乱振幅は

$$M_{fi} = M_{fi}^{(1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\sigma)\right] \tag{131.19}$$

に等しい．

この和を計算するために，ここでつぎのような補助関数 $A^{(n)}(\xi, \eta)$ を導入する．これは同じ積分（131.17）で与えられ，積分領域は

$$\xi_i > \eta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \quad \xi > \xi_n > 0, \quad \eta > \eta_n > 0 \tag{131.20}$$

1） 積分（130.3）の計算には，この方法を使うことができるはずである．

である ((131.18) では ξ_n，η_n についての積分の上限が同じであったが，ここでは別々になっている)．ここで

$$A(\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}A^{(n)}(\xi,\eta),\quad A^{(0)}=1 \tag{131.21}$$

とすると，$M_{fi}=M_{fi}^{(1)}A(\sigma,\sigma)$ であることは明らかである．

関数 $A^{(n)}(\xi,\eta)$ の定義から，これは漸化式

$$A^{(n)}(\xi,\eta)=\frac{\alpha}{2\pi}\int d\xi_1\,d\eta_1\,A^{(n-1)}(\xi_1,\eta_1)$$

を満足することがわかる．この等式を n について (1 から ∞ まで) 加えて，関数 $A(\xi,\eta)$ を決める積分方程式が得られる．すなわち

$$A(\xi,\eta)=1+\frac{\alpha}{2\pi}\int A(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1, \tag{131.22}$$
$$\xi_1>\eta_1,\quad \xi>\xi_1>0,\quad \eta>\eta_1>0$$

である．

これから先は，$\xi>\eta$ の領域で関数 $A(\xi,\eta)$ を考察すれば十分である．このとき方程式 (131.22) は

$$A(\xi,\eta)=1+\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{\eta}\int_{\eta_1}^{\xi}A(\xi_1,\eta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1 \tag{131.23}$$

の形に書くことができる．この等式を η について微分して

$$\frac{\partial A(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{\eta}^{\xi}A(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 \tag{131.24}$$

となる．そのあとでさらに ξ で微分し，$A(\xi,\eta)$ に対する微分方程式

$$\frac{\partial^2 A}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\alpha}{2\pi}A=0 \tag{131.25}$$

を得る．この方程式をつぎの境界条件のもとに解く必要がある．

$$A(\xi,0)=1,\quad \left.\frac{\partial A}{\partial\eta}\right|_{\xi=\eta}=0. \tag{131.26}$$

これは (131.23)，(131.24) から直接に出てくる．

解は，変数 ξ についてのラプラス変換

$$A(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{p\xi}Q(p,\eta)\,dp \tag{131.27}$$

を使って求めることができる．ここで複素 p-平面内の積分路 C は，点 $p=0$ を取り巻いている閉曲線である．(131.27) を方程式 (131.25) に代入し，被積分式を 0 に等しいと

置き

$$p\frac{\partial Q}{\partial \eta}=\frac{\alpha}{2\pi}Q, \quad Q=\varphi(p)e^{\frac{\alpha\eta}{2\pi p}}$$

を得る．ここで $\varphi(p)$ は任意関数である．境界条件 (131.26) の一番目は，今は

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{p\xi}\varphi(p)\,dp=1$$

になる．これから

$$\varphi(p)=\frac{1}{p}+\psi(p)$$

が出てくる．ここで $\psi(p)$ は積分路 C 内に特異点をもたない解析関数である．$\psi(p)=-2\pi p/\alpha$ と置けば，(131.26) の2番目の条件を満足することができる．実際に，このとき

$$\left.\frac{\partial A}{\partial \eta}\right|_{\xi=\eta}=-\frac{1}{\xi}\int_C\frac{d}{dp}e^{\xi\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)}dp=0$$

である．

得られた式を集め，$\xi=\eta=\sigma$ と置き

$$A(\sigma,\sigma)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{2\pi}{\alpha\sigma}\int_C p\frac{d}{dp}e^{\sigma\left(p+\frac{\alpha}{2\pi p}\right)}dp$$

を得る．最後に，部分積分を行ない，よく知られた公式

$$I_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)}dp$$

($I_1(z)=-iJ_1(iz)$ は虚引数のベッセル関数である) を使って，散乱振幅に対し最終的に

$$M_{fi}=M_{fi}^{(1)}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\sigma^2}}\,I_1\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\,\sigma\right) \tag{131.28}$$

を得る．したがって（角度 $\theta=\pi$ の）散乱断面積は

$$d\sigma=d\sigma^{(1)}\frac{2\pi}{\alpha\ln^2(s/m_\mu^2)}I_1^2\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\ln\frac{s}{m_\mu^2}\right) \tag{131.29}$$

に等しい．ここで

$$d\sigma^{(1)}=\frac{2\pi\alpha^2}{s^2}dt$$

は，超相対論的な場合のボルン近似の断面積である（§82，問題6参照）[1]．

1）散乱の2粒子過程の2重対数漸近式についての，いくつかの付加的な参考文献をあげよう：ヴェ・ゲ・ゴルシコフ，ヴェ・エヌ・グリボフ，ゲ・ヴェ・フロロフ，ЖЭТФ, **51**, 1093 (1966)（電子による光子の後方散乱）；ヴェ・ゲ・ゴルシコフ，ヴェ・エヌ・グリボフ，エリ・エヌ・リパトフ，ゲ・ヴェ・フロロフ，ЯФ, **6**, 361 (1967)（電子－陽電子の後方散乱）；ヴェ・ゲ・ゴルシコフ，ЯФ, **6**, 579 (1967)（任意の角度の散乱過程）．

第14章　ハドロンの力学対称性

§132.　アイソ多重項

もしも粒子が実の（エルミートの）φ－場で記述されるならば，運動量 $\boldsymbol{p}$ とスピンの投影 σ は，自由粒子の状態を決定する量子数の完全な組を形成する．このとき各エネルギー準位は $\boldsymbol{p}$ の方向について縮退し，また σ の値については $(2s+1)$ 重に縮退している．

場が複素数であることは，付加的縮退の存在として解釈しなおすことができる．たとえば，（与えられた $\boldsymbol{p}$ に対し）$Q=\pm 1$ のように量子数が異なる，場の二つの状態（粒子と反粒子）が同じエネルギーをもつことになる．

しかしながら，実験の示すところによれば，（今まで列挙された縮退とは別の）直接には時空間の対称性とは関係しない他の型の縮退がある．それは，電荷は異なっており，互いに粒子－反粒子の関係にあるわけでもない粒子の質量がほとんど同じであることがわかっている．このような粒子がいわゆる**アイソスピンの多重項**，あるいは**アイソ多重項**を構成している[1]．

この縮退の物理的本性は現在のところ知られていない．ただその基礎にある対称性は，相互作用の一つのカテゴリー，つまり強い相互作用と関係があることは明らかである（この意味で**力学的対称性**と言うことができる）．アイソ多重性は，強い相互作用が可能な粒子，すなわち**ハドロン**[2]と呼ばれるようなものにのみ存在する．そしてこれらの相互作用の**アイソ不変性**と呼ばれるものが姿を現わしたものである（この性質のより正確な定式化は先へいって与えられる）．

アイソ多重項の成分の性質は，強い相互作用に関しては同じであるけれども，もちろん，その電磁的性質は異なっている．この関係でアイソ多重項の縮退は完全に厳密なものではない．それに含まれる粒子の質量は近似的に一致するだけである．これらの質量のわ

1）文献でしばしば使われる述語《アイソトープの》は今の場合，非常に適当だというわけではない．なぜかというと，今は同一の質量をもち（《アイソバーの》），同一電荷をもたない粒子の性質について述べているからである．

2）《強い》とか《かさがある》という意味をもつギリシア語“ハドロス”からきている．

ずかな違いは電磁的な起源から生じると考える必要がある．

アイソ2重項を構成する二つの粒子を考察しよう．たとえば，二つの核子，すなわち陽子と中性子がこのようなものである．ことがらを限定してこれらについて述べることにする[1]．もしも電磁的相互作用を無視（それを《除外》）すれば，$|p\rangle$ と $|n\rangle$ は自由核子の二つの状態で，強い相互作用では重要でない量子数の一つ（電荷 $Z=1,0$）だけが異なっている．強い相互作用に対するこれらの性質は，状態の任意の重ね合わせ

$$\psi^1|p\rangle+\psi^2|n\rangle \tag{132.1}$$

がもっている．二つの量を一緒にした $\psi=\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}$ を**アイソスピノール**と呼ぶ．陽子と中性子は，つぎのようなアイソスピノールに対応する．

$$p:\psi=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad n:\psi=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

いろいろな重ね合わせが同値であることは，アイソスピノールは $\psi\rightarrow \mathrm{V}\psi$ の変換をしてもよいことを意味している．ここで V は2次元の (2×2) 行列である．変換は二つの1次独立な状態の規格直交性を保つものでなければならない．これは行列 V がユニタリーでなければならないことを意味している．

V のユニタリー性から，行列の判別式の絶対値が1に等しいこと，すなわち

$$|\mathrm{V}|=e^{2i\alpha}$$

が出てくる．したがって，U を判別式が1のユニタリー行列として，V はいずれも $\mathrm{V}=\mathrm{U}e^{i\alpha}$ の形に表わすことができる．明らかに，ψ に共通の位相因子を掛けることはアイソ不変性には関係がない．したがってアイソ不変性に特徴的なのはつぎの変換だけである．すなわち

$$\psi\longrightarrow \mathrm{U}\psi.$$

ここで

$$\mathrm{UU}^{+}=1,\quad |\mathrm{U}|=1. \tag{132.2}$$

ここで純数学的関係では，これらの変換は双スピノール変換と一致し[2]，普通の（3次元）スピノールが座標系の回転の際に受ける変換である．したがってアイソスピノールの代数は普通の3次元スピノールの代数と一致する．この意味でアイソ2重項を $T=1/2$

---

1) これに関してはIII，§115ですでに言及した．ここでは，もっと一般的な観点からアイソ多重性の問題を考察することにする．

2) 双スピノール変換の群はまた $SU(2)$ と呼ばれる．これは2次元の複素空間のユニタリー・ユニモデュラ（$|\mathrm{U}|=1$）変換の全体である．

の**荷電スピン**，あるいは**アイソスピン**とし，そして変換 (132.2) は形式的には，人為的《アイソ空間》での回転とみなすことができる．しかしながら，こうみなすことは普通のスピノール代数の概念に慣れているという理由で便利な表わし方であるにすぎないことを強調する必要がある．もちろん，当初の概念は想像上のアイソ空間における回転ではなくて，核子の状態の縮退を反映したユニタリー変換 (132.1) である．

$T=1/2$ のアイソスピンの成分の演算子は，普通のスピンのと同様に，パウリ・スピンを使って表わされる．これを，τ_1，τ_2，τ_3 (σ_x，σ_y，σ_z の代りに) によって表わす．すなわち

$$\mathrm{T}_1=\frac{1}{2}\tau_1, \quad \mathrm{T}_2=\frac{1}{2}\tau_2, \quad \mathrm{T}_3=\frac{1}{2}\tau_3 \tag{132.3}$$

である．アイソ空間における座標軸のこのような選び方は，陽子と中性子がそれぞれ固有値 $T_3=+1/2$ と $T_3=-1/2$ とに対応する，演算子 T_3 の固有状態と考える約束になっていることを意味している．この量子数（**アイソスピンの投影**）が陽子と中性子を区別している．したがって T_3 は電荷 Z と同じ機能を果たしている．しかももっと対称的なやり方で果たしていることになる．明らかに

$$Z=\frac{1}{2}+T_3 \tag{132.4}$$

である．

また，つぎの演算子を導入しよう．

$$\mathrm{T}_+=\mathrm{T}_1+i\mathrm{T}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}_-=\mathrm{T}_1-i\mathrm{T}_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{132.5}$$

明らかに

$$\mathrm{T}_+|n\rangle=|p\rangle, \quad \mathrm{T}_+|p\rangle=0, \quad \mathrm{T}_-|n\rangle=0, \quad \mathrm{T}_-|p\rangle=|n\rangle \tag{132.6}$$

である．

p，n の対とともに，反核子 $\bar{p}$ および $\bar{n}$ もアイソ 2 重項を形成する．

反粒子の波動関数は，粒子の波動関数に対して複素共役な量である．もしも反核子の状態を

$$\varphi_1|\bar{p}\rangle+\varphi_2|\bar{n}\rangle \tag{132.7}$$

のような重ね合わせの形に表わせば，量 φ_1，φ_2 は重ね合わせ (132.1) のなかの係数 ψ^1，ψ^2 の複素共役のように変換される．言いかえれば，これらは共変スピノールを形成する．(132.7) をアイソスピノールの反変成分を使って書き直すと

$$\varphi^1|\bar{n}\rangle - \varphi^2|\bar{p}\rangle \tag{132.8}$$

を得る．反陽子と反中性子自体はアイソスピノール

$$\bar{p}:\varphi=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad \bar{n}:\varphi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

に対応する．反陽子は固有値 $T_3=-1/2$ に，反中性子は $T_3=+1/2$ に対応する．言いかえると，反核子の電荷は

$$Z=-\frac{1}{2}+T_3 \tag{132.9}$$

である．

もっと多重度の高いアイソ多重項は，高階の対称アイソスピノールによって記述される．すなわち，階数 $n=2T$ のアイソスピノールは，アイソスピン T で記述される $2T+1$ 個の粒子からなるアイソ多重項に対応する．各アイソ多重項の範囲内では，粒子はもう一つの可算的な量子数 T_3 により区別される．この値は粒子の電荷と一定の関係になっている（§133参照）．複合系をつくる粒子のアイソスピンの合成は，普通の角運動量の合成則にしたがって行なわれる．

強い相互作用のアイソ不変性は，アイソ空間内での任意の回転に関する不変性として定式化される．言いかえれば，与えられた全スピン T をもつハドロン系の相互作用は，その全投影 T_3 の値には依存しない．散乱振幅の言葉を使うと，S－演算子はアイソスカラーであり，その行列要素は

$$\langle T'T'_3|\mathrm{S}|TT_3\rangle = S_T\,\delta_{TT'}\,\delta_{T_3T'_3} \tag{132.10}$$

であることを意味している．ここで S_T は T_3 には依存しない．

§133. ハイパーチャージ

素粒子に対する首尾一貫した理論はないが，実験データだけを基礎にしてかなりの程度その分類を行なうことができる．現存する実験データの解析から，粒子間で起こることが考えられるある反応を，許したり禁じたりする選択則を決定する一連の保存則を確立することができる．これらの保存則は，種々の粒子につけられる特殊な数指標（量子数）を使って定式化される．

まず第一に，各粒子に対して基本電荷 e の倍数である整数 Q で表わされる電荷の保存則もこの種類のものである．最も普遍的なこの保存則は厳密である．すなわち，どの粒子をとってもすべての反応に対して成立する．

すでにこの法則は電子の安定性を説明している．すなわち，電子はすべての荷電粒子のなかで最小の質量をもっているので，これは他のいかなる粒子へも自発崩壊をすることができない．陽子も，もしもこれより軽い粒子にないような電荷以外のもう一つの保存量がつけられるならば，安定性を得るだろう．この量を**バリオン数**と名付け，これを B と置く．陽子に対しては $B=1$ と置く．このとき反陽子には $B=-1$ を付ける．これは陽子と反陽子の相互消滅が許されることに対応している．

すべてのハドロンはそのバリオン数が0に等しいか，等しくないかによって二つのグループに分けられる[1]．

$B\neq 0$ のハドロンは**バリオン**と呼ばれ，$B=0$ のハドロンは**中間子**と呼ばれる．

バリオン数（すなわち，閉じた系を構成している粒子のバリオン数の和）の保存則は，また厳密でいかなる相互作用によっても破られない．ハドロンのこれ以上の分類は，相互作用を強い－，電磁的－および弱い－相互作用への分類に関係した近似を基礎にしてのみ行なうことができる．

もしも弱い相互作用を無視することができるような過程を考察するならば，空間的偶奇性と荷電偶奇性の保存則が守られる．このほかにハドロンはさらに二つの保存則に支配される．第一に，弱い相互作用だけがハドロン系の電荷を変え，それをレプトンに与えることができる．したがって，弱い相互作用を《除外》したのちには，閉じた系の全電荷 Q のみならず，レプトンの電荷とハドロンの電荷が個々に保存される．後者を Z と置く．

第二に，弱い相互作用を除くと，たとえ他の保存則がその崩壊を禁止しなくても安定であるようなハドロン（**奇妙な**粒子）が存在する．この安定性はもう一つの保存する加算的量子数を導入することによって説明される．それは**ハイパーチャージ**と名付けられ，Y と置かれる（差 $Y-B=S$ は**奇妙さ**と呼ばれ，$S\neq 0$ の粒子は奇妙な粒子である）．現在知られているハドロンのおのおのには Y の一定値をつけて，全ハイパーチャージの保存則が他の保存則とともに，強い相互作用および電磁的相互作用にしたがう反応の許容および禁止を説明できるようにすることができる．同一のアイソ多重項のすべての成分は同一の Y をもっている．あきらかに，粒子と反粒子は逆符号のハイパーチャージが付けられる．

粒子のハイパーチャージとアイソスピンのあいだには関係がある．

初めに，奇妙でない粒子のアイソ多重項を考察しよう．まず第一に，核子と反核子のア

---

1) 強い相互作用のできないすべての粒子（レプトン）に対してもまた，バリオン数は0になる．

イソ2重項はこのような例である．核子にはバリオン数 $B=1$ を，反核子には $B=-1$ を付けて，その電荷とアイソスピンの投影 T_3 とのあいだの関係を

$$Z=\frac{B}{2}+T_3$$

の形に書くことができる（(132.4) および (132.9) 参照)．ここでは $B=Y$ であるから

$$Z=\frac{Y}{2}+T_3 \qquad (133.1)$$

となる．量子数 Z, Y, T_3 がすべて加算的であるので，この関係式は核子および反核子の任意の系に対して成り立つ．さらに，このなかには粒子の他の指標は含まれないので，これは奇妙でない粒子のすべてのアイソ多重項に対して成り立つ．

与えられた値の Z, T, B, $Y(B \neq Y)$ をもつ奇妙な粒子は，そのアイソスピンおよび荷電の性質から，Z, T, Y をもつ奇妙でないハドロンと，$Z=Y=0$, $B=\pm 1$ をもつアイソスカラー（$T=0$）ハドロン（このような粒子は実際に存在する．すなわち，これは Λ-ハイペロンあるいはその反粒子 $\bar{\Lambda}$ である．§134 参照) $|B-Y|$ 個とから合成される系と同値である．このような系を合成する際に Z, Y, T_3 は変わらないので，関係式 (133.1) は破られない．このようにして，これはすべてのアイソ多重項に対して共通である[1]．

等式 (133.1) を多重項について平均する．$\bar{T}_3=0$ であるから（横線は平均の記号である）

$$\bar{Z}=\frac{Y}{2}. \qquad (133.2)$$

(133.1) からまた，Y および T のあいだの一定の関係が出てくる．Z は整数であり，$2T_3$ は $2T$ と同じ偶奇性の数であるから，Y と $2T$ は同じ偶奇性の整数である．すなわち

$$Y-2T=\text{偶数}. \qquad (133.3)$$

ハイパーチャージの概念はアイソ対称性とは無縁のものであることを指摘する必要がある．したがって，関係式 (133.1)～(133.3) はアイソスピノールの性質だけの結果ではない．また (133.1) を導く際に，ただ現実に存在する粒子 (n, p, Λ) からつくられた《複合》粒子についての概念を用い，論理的に考えうる他の何らかの粒子からつくられたもの

1) ハイパーチャージ（あるいは奇妙さ）の概念を使った多重項の構成は最初にゲルマン (M. Gell-Mann, 1953) および西島 (K. Nishijima, 1953) により定式化された．(133.1) の上述の導き方は坂田 (S. Sakata, 1956) のものである．

を用いたわけではないことも強調しよう。

関係式 (133.1) があるので，ハイパーチャージの保存は T_3 の保存と同値である．系のアイソスピンの全投影はこのようにして，弱い相互作用を除けば保存される．系の全アイソスピンの大きさの保存は電磁相互作用の無視も要求する。

§134. 準安定なハドロン

光子は例外として，自然界には整数のスピンをもつ安定な（すなわち，自発的に崩壊しない）《素》粒子は存在しない．しかしながら，**準安定な**ボソンの組がある．これらは中間子のことである．

準安定というとき，われわれは強い相互作用に関しては安定であることと理解する．これらの粒子の崩壊は，電磁的あるいは弱い相互作用だけと関係がある．この寿命は比較的永く，10^{-8} から 10^{-19} sec である．ところが，強い相互作用は寿命が $10^{-21}\sim10^{-23}$ sec の崩壊をもたらすはずである．

第1表 中 間 子

粒 子	質 量 (MeV)	寿 命 (sec)
π^+, π^-	139.6	$2.6\cdot10^{-8}$
π^0	135.0	$0.8\cdot10^{-16}$
K^+, K^-	493.8	$1.24\cdot10^{-8}$
$K^0, \bar{K}^0$	497.8	$\begin{cases}0.86\cdot10^{-10}\ (K_S^0)\\ 5.4\cdot10^{-8}\ (K_L^0)\end{cases}$
η	548.8	$\sim10^{-19}$

8個の準安定な中間子が存在する．これらはすべてスピンが0で，負の偶奇性をもっている（擬スカラー粒子である）．第1表には，これらの質量と寿命が載せてある[1]．

対 (π^+, π^-), (K^+, K^-), $(K^0, \bar{K}^0)$ は粒子と反粒子を構成している．したがってその質量と寿命は正確に同じである．

粒子の電荷とハイパーチャージは次表で与えられる．

Y \ Z	−1	0	1
−1	K^-	$\bar{K}^0$	—
0	π^-	π^0, η	π^+
1	—	K^0	K^+

(134.1)

1) K^0－中間子に二つの寿命があることは特異な現象で，§154 で考察される．

すべての中間子に対して $B=0$ であるから，これらのなかでは K-中間子が奇妙な粒子である．

中間子はアイソ多重項に分けられる．すなわち，アイソ1重項 η，アイソ2重項 $K=(K^0, K^+)$ および $\bar{K}=(\bar{K}^0, K^-)$，アイソ3重項 $\pi=(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ である．Y と T の値をくらべて，これらの多重項の表をつぎの形に表わすことができる．

Y \ T	0	1/2	1
−1	—	$\bar{K}$	—
0	η	—	π
1	—	K	—

(134.2)

アイソ多重項の成分はつぎのように T_3 の値で区別される．

$$\overbrace{\pi^+ \quad \pi^0 \quad \pi^-} \qquad \overbrace{K_0 \quad K^+} \qquad \overbrace{\bar{K}_0 \quad K^-}$$
$$T_3 = 1 \quad 0 \quad -1 \qquad -1/2 \quad 1/2 \qquad 1/2 \quad -1/2.$$

π-中間子の準安定性は，これらがすべてのハドロンのなかで最も軽いものであることによって保証される．K-中間子の π-中間子への崩壊に対する安定性はハイパーチャージの保存により保証される．崩壊 $\eta \to 2\pi$ は偶奇性により禁止される．すなわち，これらの粒子はすべてスピンをもたないので，二つの π の系では角運動量は $l=0$ になり，したがってその偶奇性は $-1 \cdot -1 = +1$ になるはずである．他方 η の偶奇性は -1 である．η-中間子の崩壊 $\eta \to 3\pi$ に関する準安定性は，アイソ対称性と粒子-反粒子の対称性を同時に適用することにより確かめられる．これは次節で示される．

π^+, π^- および K-中間子の現実の崩壊は弱い相互作用と結びついている．対応する寿命は $10^{-8}-10^{-10}$ sec である．π^0 と η の崩壊（$\pi^0 \to 2\gamma$；η は光子とパイオンへ）は電磁的な原因で起こり，その寿命は $10^{-16}-10^{-19}$ sec である．

中間子 π^0 は真性中性粒子である．そういうわけで，それは一定の荷電偶奇性 C をもち，その2光子への崩壊は $C=+1$ であることを示している．

バリオン中で唯一つの安定な粒子は，そのなかで最も軽いもの，すなわち陽子である．このほか，いくつかの準安定なバリオンがある．これらの崩壊は弱い相互作用によって起こされる．第2表に列挙されている粒子がそれである．これらの粒子はすべて反粒子をもち，これらは**反バリオン**と呼ばれる．もちろん，バリオンと反バリオンの質量および寿命

第2表 バリオン

粒子	質量(MeV)	寿命 (sec)
p	938.26	∞
n	939.55	$0.93\cdot 10^{3}$
Λ	1115.6	$2.5\cdot 10^{-10}$
Σ^{+}	1189.4	$0.80\cdot 10^{-10}$
Σ^{0}	1192.5	$<1\cdot 10^{-14}$
Σ^{-}	1197.3	$1.5\cdot 10^{-10}$
Ξ^{0}	1314.7	$3.0\cdot 10^{-10}$
Ξ^{-}	1321.2	$1.7\cdot 10^{-10}$
Ω^{-}	1672	$1.3\cdot 10^{-10}$

は同一である[1]．

すべてのバリオンにはバリオン数 $B=1$ が付けられ，すべての反バリオンには $B=-1$ が付けられる．バリオン Ω^- はアイソ1重項で，そのハイパーチャージは $Y=-2$，そのスピンは (かりに) 3/2 に等しい．列挙したバリオン中の残りはスピン 1/2 で同一の偶奇性をもつ (フェルミオンに対しては絶対偶奇性ではなく，相対偶奇性だけが意味があることを思い起こす必要がある．§27 参照)．電荷とハイパーチャージについては

Y \ Z	-1	0	1
-1	Ξ^-	Ξ^0	—
0	Σ^-	Σ^0, Λ	Σ^+
1	—	n	p

(134.3)

が成り立つ．バリオン Λ, Σ, Ξ は (および Ω もまた) 0と異なる奇妙さをもっている．これらを**ハイペロン**とも呼ぶ．アイソスピンの性質によってバリオンは，アイソ1重項 Λ，核子アイソ2重項 $N=(p,n)$，ハイペロン・アイソ2重項 $\Xi=(\Xi^0,\ \Xi^-)$，ハイペロン・アイソ3重項 $\Sigma=(\Sigma^+,\Sigma^0,\Sigma^-)$ を形成する．Y と T の値を対照させて，これらのアイソ多重項をつぎの形の表に配置することができる．

Y \ T	0	1/2	1
-1	—	Ξ	—
0	Λ	—	Σ
1	—	N	—

(134.4)

1) 反バリオンは他の反粒子と同様に，記号の上の横線を使って示される．$\bar{\Sigma}^-$ と $\bar{\Sigma}^+$ はけっして Σ^+ と Σ^- には一致しないことを強調しよう！

同じアイソスピン T および逆符号の Z と Y の値をもつ反バリオンが同様な表に配置される.

この節で列挙された準安定粒子とならんで，強い相互作用のために崩壊する多数のハドロンが知られている．その寿命が非常に短い ($10^{-21} \sim 10^{-23}$ sec) ために，これらは高エネルギーの反応で共鳴の形でのみ実験にかかってくる．したがって，これらの《粒子》はしばしば単に**共鳴**と呼ばれる.

しかしながら，つぎの点は強調する必要がある．分類の性質の観点から見ると，粒子の《質量スペクトル》全体のなかでの位置および選択則により決定される崩壊の仕方は本質的な価値をもたない．ここでは準安定粒子の列挙に限り解説の目的だけを追及しよう.

問　　題

1. 強い相互作用のアイソ不変性を使って，反応 $p+p \to d+\pi^+$ (1) と $p+n \to d+\pi^0$ (2) の微分断面積のあいだの関係を見いだせ.

解 重陽子に対しては $T = T_3 = 0$ である (III，§116 参照)．したがって，反応で生じた系のアイソスピン状態 $|TT_3\rangle$ はパイオンの状態と一致する．すなわち，$|11\rangle$ および $|10\rangle$ である．これらはそれぞれ第1と第2の反応に対応する．これらの反応のもとの状態はそれぞれ積 $|1/2\ 1/2\rangle|1/2\ 1/2\rangle$ および $|1/2\ 1/2\rangle|1/2\ -1/2\rangle$ で与えられる．角運動量合成の際の波動関数のつくり方にしたがって

$$|pp\rangle \equiv |1/2\ 1/2\rangle|1/2\ 1/2\rangle = |11\rangle,$$
$$|pn\rangle \equiv |1/2\ 1/2\rangle|1/2\ -1/2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

であることがわかる．このようにして，反応 (1) に対しては始めと終りのアイソスピン状態は一致する．したがってアイソスピン保存は恒等的に守られている．反応 (2) に対しては，終状態 $|10\rangle$ は始状態のなかにはわずか $(1/\sqrt{2})^2 = 1/2$ の確率でしか現われない．その他の点については (座標およびスピン自由度の意味で) 二つの反応は同一であるから

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

になる．ここで σ_1, σ_2 は，粒子のスピン相互の向きが同じときのエネルギー区間と，飛び出す角度領域とが同じとしたとき，反応 (1) および (2) の微分断面積である.

類似の問題の (ベクトル合成の係数を使う必要のない) 別の解法はつぎのようになる (И. М. Шмушкевич, 1955)．始めの粒子がアイソスピンについて偏っていないとしよう.

これは2核子 NN の系が異なる確率で pp, nn, pn, np の状態になることができ，これらからつぎの反応が起こることを意味している．

$$p+p\to d+\pi^+ \qquad (\sigma_1),$$
$$n+n\to d+\pi^- \qquad (\sigma_3),$$
$$p+n\to d+\pi^0 \qquad (\sigma_2),$$
$$n+p\to d+\pi^0 \qquad (\sigma_2).$$

反応を呼び起こす相互作用のアイソ不変性のために，終りの粒子も偏っていてはならないことがわかる．これは今の場合 π^+, π^0, π^- が同じ確率で生じなければならないこと，すなわち $\sigma_1=\sigma_3=2\sigma_2$ でなければならないことを意味している．また，等式 $\sigma_1=\sigma_3$ は，この二つの反応の違いが同時に全粒子の T_3 の符号を変えるだけであることからただちに明らかであることも指摘しておこう[1]．

2. 反応 $\pi+N\to\Lambda+K$ に対して同じことを行なえ．

解 ハイパーチャージの保存則から，つぎの反応が可能になる．

$$\pi^++n\to\Lambda+K^+,\quad \pi^-+p\to\Lambda+K^0 \qquad (\sigma_1),$$
$$\pi^0+p\to\Lambda+K^+,\quad \pi^0+n\to\Lambda+K^0 \qquad (\sigma_2)$$

(すべての T_3 の符号だけが異なる反応の対はまとめてある)．π と N とが偏らないときに，K のアイソスピンが偏らない条件は恒等的に満足される．もしも逆反応を考察すれば，K が偏らないときに π の偏らないことを要求すると

$$\sigma_1=2\sigma_2$$

を得る．

3. 同じことを πN-反応について行なえ．

解 アイソスピンについて偏らないパイオンと核子の衝突の際にはつぎの反応が起こる．

$$\pi^++p\to\pi^++p,\quad \pi^-+n\to\pi^-+n \qquad (\sigma_1),$$
$$\pi^-+p\to\pi^-+p,\quad \pi^++n\to\pi^++n \qquad (\sigma_2),$$
$$\pi^-+p\to\pi^0+n,\quad \pi^++n\to\pi^0+p \qquad (\sigma_3),$$
$$\pi^0+p\to\pi^0+p,\quad \pi^0+n\to\pi^0+n \qquad (\sigma_4),$$
$$\pi^0+p\to\pi^++n,\quad \pi^0+n\to\pi^-+p \qquad (\sigma_5)$$

1) この変換に対する対称性はいつも**荷電対称性**と呼ばれ，もっと一般的なアイソ不変性とは異なり，特殊な場合としてそれに含まれている．

(すべての T_3 の符号だけが異なる反応の対は，ここでもまとめてある)．終りのパイオンが偏らないという要求から

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_5=2(\sigma_3+\sigma_4).$$

このほか，反応と逆反応の断面積だから $\sigma_3=\sigma_5$ である．したがって

$$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_3+2\sigma_4$$

となる．

4. もしも終状態がアイソスピン $T=3/2$ だけが可能なとき[1)]，反応

$$\pi^++p\to\pi^++p \qquad (\sigma_1),$$

$$\pi^-+p\to\pi^-+p \qquad (\sigma_2),$$

$$\pi^-+p\to\pi^0+n \qquad (\sigma_3)$$

の断面積のあいだの関係を見いだせ．

解 角運動量の合成則から

$$|\pi^+p\rangle\equiv|1\,1\rangle|1/2\ 1/2\rangle=|3/2\ 3/2\rangle,$$

$$|\pi^-p\rangle\equiv|1\ -1\rangle|1/2\ 1/2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}|3/2\ -1/2\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}|1/2\ -1/2\rangle,$$

$$|\pi^0n\rangle\equiv|1\,0\rangle|1/2\ -1/2\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}|3/2\ -1/2\rangle-\frac{1}{\sqrt{3}}|1/2\ -1/2\rangle$$

となる．$S_{1/2}=0$，$S_{3/2}=A$ とする（記号 S_T は（132.10）からとった）．このとき

$$\langle\pi^+p|S|\pi^+p\rangle=A,\quad \langle\pi^-p|S|\pi^-p\rangle=\frac{1}{3}A,\quad \langle\pi^0n|S|\pi^-p\rangle=\frac{\sqrt{2}}{3}A.$$

したがって

$$\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3=9:1:2$$

である．

5. アイソ不変性を考慮して，$\pi\pi$－弾性散乱振幅のなかの不変振幅を分離せよ．

解 散乱振幅の一般形は

$$M_{fi}=f_1(\chi_1\chi_2)(\chi_3\chi_4)+f_2(\chi_1\chi_3)(\chi_2\chi_4)+f_3(\chi_1\chi_4)(\chi_2\chi_3)$$

である．ここで $\chi_1,\chi_2,\cdots$ は二つの始めのパイオン，および二つの終りのパイオンのアイソ波動振幅（アイソベクトル）である．f_1，f_2，f_3 は不変振幅で運動学的不変量 s，t，u の関数である（この数，つまり3はアイソスピン1をもつ粒子の2粒子系の全アイソスピンの可能な値の数と一致している)．関数 f_1，f_2，f_3 は四つのパイオンが同一であること

1) このような共鳴はパイオンの運動エネルギーが 190 MeV のところにある．

に対応する一定の対称性をもっている．始めの二つのパイオンを交換するとき，$\chi_1 \leftrightarrow \chi_2$，$s \to s$，$t \leftrightarrow u$ である．これから

$$f_1(s,u,t) = f_1(s,t,u), \quad f_2(s,u,t) = f_3(s,t,u)$$

である．

6. πN－弾性散乱に対して同じことをせよ．

解 アイソスピン 1/2 と 1 の合成は，全アイソスピンの二つの可能な値を与える．これに対応して二つのアイソ振幅がある．M_{fi} の一般形は

$$M_{fi} = M_1 + M_2(v'^*\boldsymbol{\tau}v)[\boldsymbol{\chi}'^*\boldsymbol{\chi}],$$

$$M_1 = f_1(\overline{u'}u) + g_1(\overline{u'}\hat{P}u), \quad M_2 = f_2(\overline{u'}u) + g_2(\overline{u'}\hat{P}u)$$

である．ここで f_1，f_2，g_1，g_2 は不変振幅である．u，u' は始めと終りの核子の双スピノール振幅であり，$P = p + p'$ である．ここで p，p' はパイオンの 4－運動量である（(71.3) 参照）．$\boldsymbol{\chi}$，$\boldsymbol{\chi}'$ はパイオンのアイソ波動振幅（アイソベクトル）で，v，v' は核子のアイソ振幅（アイソスピノール）である．$\boldsymbol{\tau}$ はアイソスピンの添字に働くパウリ行列である．

7. NN－弾性散乱に対して同じことを行なえ．

解 散乱振幅の一般形は

$$M_{fi} = M_1 + M_2(v_1'^*\boldsymbol{\tau}v_1)(v_2'^*\boldsymbol{\tau}v_2), \quad M_1 = \sum_{i=1}^{5} f_iF_i, \quad M_2 = \sum_{i=1}^{5} g_iF_i$$

である．ここでは f_i，g_i は不変振幅である．$v_1, v_1', \cdots$ は四つの核子のアイソスピノール振幅である．F_i は核子の双スピノール振幅からつくられる不変量である（(71.4) 参照）．

§135. G－偶奇性

強い相互作用はハドロン系の荷電偶奇性とアイソスピンを保存することはすでにみてきた．これら二つの保存則は，同時に適用すると，これらのそれぞれからは得られない新しい保存則が現われてくる（T. D. Lee, C. N. Yang, 1956）．

強い相互作用のアイソ不変性は《アイソ空間における回転》に対する不変性として定式化することができる．この空間の x^2－軸のまわりの角度 π の回転を考えよう．アイソスピノール $\psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}$ は

$$\psi \to e^{i\pi T_2}\psi = e^{i(\pi/2)\tau_2}\psi = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\tau_2\sin\frac{\pi}{2}\right)\psi = i\tau_2\psi \qquad (135.1)$$

にしたがって変換される．特にアイソ 2 重項の二つの成分（たとえば陽子と中性子）に対

応するアイソスピノールに対しては

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

あるいは

$$p\to -n,\quad n\to p$$

が成り立つ．ここで p および n は簡単のために荷電状態 $|p\rangle$ および $|n\rangle$ を表わしている．同様に，反核子に対しても同じ変換が見いだされる．すなわち

$$\bar{p}\to -\bar{n},\quad \bar{n}\to \bar{p}$$

である．

ここで，考えられている回転に荷電共役の演算 C を付け加えよう．二つの演算子の積を G で表わす．

$$\mathrm{G}=\mathrm{C}e^{i\pi \mathrm{T}_2}. \tag{135.2}$$

荷電共役は変換 $p\leftrightarrow\bar{p},\ n\leftrightarrow\bar{n}$ であるから，演算子（135.2）の作用のもとでは

$$\mathrm{G}:\quad p\to -\bar{n},\quad n\to\bar{p},\quad \bar{p}\to -n,\quad \bar{n}\to p \tag{135.3}$$

となる．

演算子 G はアイソスピンの3成分 T_1，T_2，T_3 のすべてと可換である．このことは，核子反核子状態を変換する4行4列の行列の形で演算子のあらわな式を書くことにより，直接に確かめるのが最も簡単である．これらの状態を縦行列

$$\begin{pmatrix}p\\n\\\bar{n}\\-\bar{p}\end{pmatrix}$$

の形に配置して

$$\mathrm{T}_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tau_1&0\\0&\tau_1\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tau_2&0\\0&\tau_2\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\tau_3&0\\0&\tau_3\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{C}=\begin{pmatrix}0&-i\tau_2\\i\tau_2&0\end{pmatrix},\quad \mathrm{G}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

を得る（ここで0および1は2行2列の行列である）．

もしも演算子 G が粒子（あるいは粒子系）を自分自身に転換すれば，その G-偶奇性についての概念が生じる．すなわち，状態が符号を変えないままでいるか，または符号を変えるかである．このためには粒子のバリオン数とハイパーチャージは0に等しくなることが必要である．実際に，荷電共役（粒子から反粒子への移行）は電荷の符号，したがっ

て量子数 Y, B の符号を変える．アイソ空間の回転は Z を変えるが Y と B は変えない．したがって二つの変換を一緒に使うと，一般にはもし0に等しくなければ量子数 Y, B を変える．

G－偶奇性の重要な性質は，同一のアイソ多重項のすべての成分について，それが同じであることにある．これは演算子Gが $\mathbf{T}$ の全成分と可換であり，したがってアイソ空間内のすべての回転と可換であることからきている．

$Y=0$ のときは $Z=T_3$ が成り立ち，これから，T_3 および T が整数であることがわかる．整数の T をもったアイソ多重項は，T 階の既約アイソテンソル $\psi_{ik\ldots}$ と同等な偶数の $2T$ 階の対称アイソスピノールによって記述される．このようなアイソ多重項の成分のなかには中性粒子 $(T_3=0)$ が存在する．成分 $\psi_{33\ldots}$ だけが0と異なるアイソテンソルがこれに対応する．x^2－軸のまわりの角度 π の回転は，このテンソルに $(-1)^T$ を掛ける．もしも C を中性粒子の荷電偶奇性とすれば，その G－偶奇性は

$$G=C(-1)^T \tag{135.4}$$

である．上記の方法にしたがって，アイソ多重項のすべての成分の G－偶奇性が決定される．

たとえばパイオンのアイソ3重項 $(T=1)$ を考察しよう．π^0－中間子の荷電偶奇性は $C=+1$ である（これは，π^0 が偶数個，すなわち2個の荷電奇の粒子，すなわち光子に崩壊することから出てくる)．したがってパイオンの G－偶奇性は $G=-1$ である．これから，特に強い相互作用の影響下のパイオン系は，粒子数の偶奇性を変えない他のパイオン系に移れると結論することができる．

η－中間子はアイソ1重項 $(T=0)$ であり，その荷電偶奇性は $C=+1$ である（η 中間子は π^0 と同様に2光子に崩壊する)．したがって，$G=+1$ である．これから，強い相互作用は崩壊 $\eta\to 3\pi$ をひき起こすことができないことが導かれる．

§136. ユニタリー対称性 $SU(3)$

現存する実験データによると，荷電対称性は強い相互作用に特有のより高次な対称性の現われの一つにすぎないことが基礎づけられる[1]．この対称性では電荷とハイパーチャー

1) この対称性の要求が守られる精度は実際には高くはない．この事情は，もしも強い相互作用が《本質的に強い》相互作用と《適度に強い》相互作用から合成されていて，全体としての対称性は後者を《除外》したあとでのみ現われるとすると，わかりやすく表わすことができる．この分解の対応するパラメータはおおよそ $\sim 1/10$ に見積もられる．

ジは同等に現われる．すなわち関係式

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 \tag{136.1}$$

とならんで，また等式

$$Y = \frac{Z}{2} + U_3 \tag{136.2}$$

も書くことができる．ここで U_3 はもう一つの保存される《スピン》の投影である（これをアイソスピン T と区別して u－アイソスピンと呼ぼう．これに関連してアイソスピンは t－アイソスピンと呼ぶことにしよう）．

こういうわけで，同時に二つの加算的量子数が現われるような対称性を研究する問題が生じる[1]．

われわれは§132で，荷電対称性の基礎には，一つの量子数の値 $T_3 = \pm 1/2$ で区別される二つの《基本的》粒子のアイソ2重項の対称性があることを見てきた．多重度が高いアイソ多重項の成分は，(そのアイソスピンの性質に関しては)いくつかの基本的粒子の組からつくられる《複合》粒子をまねてつくられる．このようにして自然に一つの加算的量子数 T_3 を使って結びつけられた対称性に到達する．

これから，もしもわれわれが二つの独立な量子数で区別される，三つの《基本的》粒子の同等性を表わす対称性から出発することにすれば，二つの量子数をもつ対称性へ到達することは明らかである．これらの仮説の粒子は**クォーク**と呼ばれる．これらを記号 Q_p，Q_n，Q_Λ で表わそう．しかしながら，考察される対称性がこれらの粒子を使ってわかりやすく記述されるけれども，自然界におけるその実在性はそれによって必然的になったわけではないことをここで強調しておこう．原理的には《複合》粒子だけの実在が認められるような立場も可能である．

つぎの重ね合わせを考えよう．

$$\psi^1 | Q_p \rangle + \psi^2 | Q_n \rangle + \psi^3 | Q_\Lambda \rangle. \tag{136.3}$$

三つの量を一緒にした

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix} \tag{136.4}$$

1) この対称性をもとにした粒子の分類は最初に，ゲルマンおよびネエマンによって独立に導入された (M. Gell-Mann, Y. Ne'eman, 1961).

を**超スピノール**と呼ぼう．いろいろな重ね合わせが同等であることは，ϕ には任意のユニタリー・ユニモデュラ変換 U を掛けてもよいことを意味している．これらの変換の集まりは群 $SU(3)$ を形成する（170頁脚注参照）．

群 $SU(3)$ をつくっている行列 U は，すべてのユニタリー行列と同様に

$$\mathrm{U} = e^{i\mathrm{R}} \tag{136.5}$$

の形に表わすことができる．ここで R はエルミート行列である．$|\mathrm{U}| = 1$ であるから，$\mathrm{Sp\,R} = 0$ である．無限小変換のときは $\mathrm{U} = 1 + i\delta\mathrm{R}$ である．無限小行列 $\delta\mathrm{R}$ の一般形は

$$\delta\mathrm{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\delta\alpha_i\cdot\lambda_i \tag{136.6}$$

である．ここで $\delta\alpha_i$ は実パラメータであり，λ_i は1次独立な跡なしの3次元エルミート行列である．これらは合計8個（$3\cdot3-1=8$）あることは明らかである．このようにして，超スピノールの無限小変換は $\phi^a \to \phi^a + \delta\phi^a$ である．ここで

$$\delta\phi^a = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{8}\delta\alpha_i(\lambda_i)^a_b\phi^b \tag{136.7}$$

である（$(\lambda_i)^a_b$ は λ_i の行列要素で，上の添字は行の，下の添字は列の番号である）．

8個の行列 λ_i の組は**超スピン**演算子と呼ぶことができる[1]．これらのあらわな形は，重ね合わせ（136.3）が二つの項しか含まないときに，λ_i がパウリ行列にならなければならないことに気付けば容易に求められる．これからわれわれは，パウリ行列の形で，一つの行と一つの列が0であるような九つの行列に到達する．すなわち

$$\begin{gathered}
\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\\
\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\\
\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{136.8}$$

である．これらの行列のなかで八つだけが独立であり，$\mathbf{t}_3 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3$ である．λ_i としては

1) 普通の（3次元）スピノールに対しては $\delta\mathrm{R} = \delta\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2$ であることを思い起こそう．ここで $\delta\boldsymbol{\theta}$ は座標系の回転角である．

つぎのように選ぶ.

$$\lambda_1 = \mathrm{t}_1, \quad \lambda_2 = \mathrm{t}_2, \quad \lambda_3 = \mathrm{t}_3,$$
$$\lambda_4 = \mathrm{v}_1, \quad \lambda_5 = \mathrm{v}_2, \quad \lambda_6 = \mathrm{u}_1, \quad \lambda_7 = \mathrm{u}_2, \tag{136.9}$$
$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathrm{u}_3 + \mathrm{v}_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

これらすべての行列は

$$\mathrm{Sp}\,\lambda_i \lambda_k = 2\delta_{ik} \tag{136.10}$$

になるように規格化されている. そしてこれらの平方の和は単位行列に比例する.

$$\sum_{i=1}^{8} \lambda_i^2 = \frac{16}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{136.11}$$

λ_i の交換則はつぎの形になる.

$$[\lambda_i, \lambda_k]_- = 2i \sum_{l=1}^{8} f_{ikl} \lambda_l. \tag{136.12}$$

このとき (136.10) によって

$$f_{ikl} = \frac{1}{4i}\,\mathrm{Sp}\,([\lambda_i, \lambda_k]_- \lambda_l) \tag{136.13}$$

である. これから, 係数 f_{ikl} はすべての三つの添字について反対称であることが出てくる.

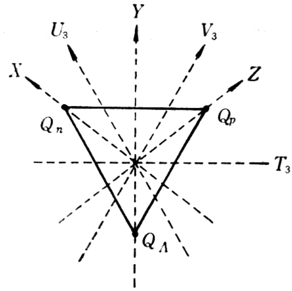
$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2},$$
$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だけが0と異なり, 残りはこれから添字の交換をし, それに対応して符号を変えることによって求められる[1].

三つのクォーク相互の対称性は, これらを等辺三角形の頂点の位置の3点で表わした図形でわかりやすく説明することができる (第25図). これは3点が同等であるような唯一の配置である. 面上の各点の位置は, 粒子を特徴づける二つの独立な量子数に対応する二つの座標によって決定される. この図形上での座標原点の自然な選び方は3角形の中心で

1) 連続群の数学の理論では, 無限小変換群を定義する行列をそのジェネレーターと呼び, これらの行列の代数をリー代数という. ジェネレーターの交換則がリー代数の基礎になっている. これによって群の構造が決定される.

あり，自然な軸は3角形の頂点を通る三つの軸（第25図の X, Y, Z），およびその辺に平行な三つの軸（T_3, U_3, V_3）である．このときこれらの軸に沿っての長さの自然な単位は，それぞれ3角形の高さと辺の長さである．点の座標（クォークの量子数）は，これらの軸のなかの任意の対に関して与えることができる．そして残りの量子数はこれらの二つを使って表わすことができる．第25図の上の軸は関係式(136.1)，(136.2) が満足されるように選ばれる．



第 25 図

たとえば軸 Y, T_3 あるいは軸 Z, U_3 での点の座標をつぎのように書けばこれは容易に確かめられる．

$$
\begin{aligned}
&\qquad\quad\ \ Q_p \qquad\quad\ \ Q_n \qquad\quad\ Q_\Lambda\\
(Y, T_3) &= \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)\ \left(-\frac{2}{3},\ 0\right).\\
(Z, U_3) &= \left(\frac{2}{3},\ 0\right)\ \left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)\ \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{136.14}
$$

クォークの電荷とハイパーチャージがこのとき分数で表わされることに注目しよう[1]．

対角行列である演算子がクォークの二つの独立な量子数にくらべられる．行列 λ_i のなかで λ_3 と λ_8 が対角形である．これらを量子数 (136.14) とくらべて

$$
\mathrm{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8, \quad \mathrm{T}_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \quad \mathrm{Z} = \frac{1}{2}\left(\lambda_3 + \frac{\lambda_8}{\sqrt{3}}\right) \tag{136.15}
$$

となる．

変換群 $SU(3)$ のなかに，超スピノールの2成分 ψ^1 および ψ^2 だけを動かす変換の部分群 $SU(2)$ がある．この部分群（これを t－アイソ群と呼んでもよい）に関して，クォーク Q_p, Q_n はアイソ2重項（$T=1/2$）を，また Q_Λ はアイソ1重項を形成する．ψ^2 および ψ^3 だけに関する変換の部分群（u－アイソ群）に関しては Q_n, Q_Λ の対がアイソ2重項（$U=1/2$），また Q_p がアイソ1重項を形成する．この二つとならんでさらに第3の類似の部分群（v－アイソ群）が自動的にできる．そこでは Q_p と Q_Λ がアイソ2重項の対を形成している．行列のトロイカ $(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3)$，$(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$，$(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3)$ はしたがって

1) もちろん，第25図の幾何学的構造それ自体は，点の座標をクォークの物理的量子数に等しいと置くことに対して十分な基礎になりえない．このような基礎は，実際には先へいって現実に存在する粒子の性質との一致のみが与えてくれる（§137）．

t-，u-および v-アイソスピンの演算子を構成している．

関数 (136.3) に複素共役な波動関数は反クォークの状態の重ね合わせとみなされなければならない．もしもこのような重ね合わせを

$$\psi_1|\bar{Q}_p\rangle + \psi_2|\bar{Q}_n\rangle + \psi_3|\bar{Q}_\Lambda\rangle \qquad (136.16)$$

の形に書けば，ψ_a はしたがって ψ^{a*} のように変換される．三つの量 (ψ_1, ψ_2, ψ_3) は共変超スピノールを形成する ((136.4) の反変超スピノールと逆である)．行列 λ_i のエルミート性のために，(136.7) から，無限小変換の際には

$$\delta\psi_a = -\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{8}\delta\alpha_i(\lambda_i)_a^b\psi_b \qquad (136.17)$$

を得る．

重要なことは成分 ψ_a からは ψ^a と同様に変換されるような1次結合をつくることができないことである．したがって，群 $SU(3)$ のなかで共変および反変超スピノールがあり，これは二つの独立な型の量である．この関係でこれらは普通のスピノールと異なっている．後者に対しては反変および共変成分は1次式 $\psi_\alpha = e_{\alpha\beta}\psi^\beta$ で結びつけられている (ここで $e_{\alpha\beta}$ は単位反対称記号で $e_{12}=1$ である)．

この違いの由来はつぎのようなことである．群 $SU(2)$ では2次形式 $\psi^\alpha\varphi^{\alpha*}$ (ψ，φ は二つのスピノール) は変換群のユニタリー性から，また2次形式 $\psi^\alpha\varphi^\beta e_{\alpha\beta}$ はそのユニモデュラ性から不変である．二つの不変量をくらべると $\varphi^{\alpha*}$ は $e_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ のように変換されることがわかる．群 $SU(3)$ ではユニタリー性は2次形式 $\psi^a\varphi^{a*}$ (ψ，φ は二つの超スピノール) の不変性で，またユニモデュラ性は3次形式 $e_{abc}\psi^a\varphi^b\chi^c$ ($e_{abc}=e^{abc}$ は単位反対称記号で，$e_{123}=1$ である) の不変性で表わされる．これから，φ^{a*} は（1次でなく）2次結合 $e_{abc}\varphi^b\chi^c$ のように変換されることがわかる．

§137. 超 多 重 項

p 個のクォークと q 個の反クォークからなる系の波動関数は p 個の上の添字と q 個の下の添字をもつ高階の超スピノール

$$\psi^{a_1a_2\cdots a_p}_{b_1b_2\cdots b_q}$$

で表わされる．これは1階の超スピノールの p 個の反変成分と q 個の共変成分の積のように変換される．上と下の添字が同等でないので，これらの数を加えることは意味がない．したがって超スピノールの階数は数 p，q の対によって表わさなければならない．

超スピノールの階数は二つの同等でない方法で下げることができる．すなわち，上の添字の一つと下の添字の一つの縮約（すなわち,単位対称記号 δ_a^b を掛けること），および上あるいは下の添字対についての反対称化（すなわち，$e_{a_1a_2b}$ あるいは $e^{b_1b_2a}$ を掛けること）によるものである．つまり

$$\psi_{b_1}^{a_1a_2}\delta_{a_1}^{b_1} = \psi^{a_2}, \quad \psi^{a_1a_2a_3}e_{a_1a_2b} = \psi_b^{a_3}, \quad \psi_{b_1b_2b_3}e^{b_1b_2a} = \psi_{b_3}^{a}$$

である．

したがって，もしもそれがすべての上あるいはすべての下の添字について（別々に）対称であれば，また上の一つと下の一つの添字の任意の対についての跡が0に等しいならば，超スピノールの階数を下げることはできない．このような超スピノールは**既約**と呼ばれる．これらの成分は群 $SU(3)$ の既約表現になっている．階数 $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ の既約スピノールの独立な成分の数は

$$N_{pq} = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) \tag{137.1}$$

に等しい[1]．

もしも粒子の状態が階数 $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ の超スピノールによって記述されるとすれば，粒子の超多重項を構成する N_{pq} 個の互いに縮退した状態が存在する．考えられている対称性の枠内では，これらの状態はすべて同等であり，これを何かある決まった組に分ける根拠は存在しない．しかしながら，対称性を破るような相互作用を《挿入》するとき，これらの相互作用を特徴づける量子数の値にしたがって，超多重項の成分の実質的な分類が始まる．この意味で超多重項は，いくつかのアイソ多重項に分けられ，その成分は量子数 Y, T, T_3 の一定値をもっている．

(136.14) にしたがって，1階の超スピノールの反変成分は，量子数 Y および T_3 のつ

1) 上の添字（下の添字）が 1, 2, 3 になる回数を p_1, p_2, p_3 (q_1, q_2, q_3) としよう．$p_1+p_2+p_3=p$ であるから，p_2 を与えたときに数 p_1 は0から $p-p_2$ までの $p-p_2+1$ 個の値をとる．したがって

$$N_{p0} = \sum_{p_2=0}^{p}(p-p_2+1) = \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

である．もしも超スピノールの跡が0に等しいことを要求しないならば N_{qp} は積 $N_{p0}N_{0q}$ で与えられるはずである．跡が0の条件は ($p-1$, $q-1$) 階の超スピノールが0になることと同値である．したがって

$$N_{pq} = N_{p0}N_{0q} - N_{p-1,0}N_{0,q-1}$$

である．これから (137.1) が得られる．

ぎの値に対応する。

$$\begin{matrix} & \psi^1 & \psi^2 & \psi^3 \\ (Y, T_3) = & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{2}{3}, 0\right). \end{matrix}$$

反クォークの量子数はクォークの量子数と符号が逆である．したがって共変スピノール成分に対しては

$$\begin{matrix} & \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ (Y, T_3) = & \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{2}{3}, 0\right) \end{matrix}$$

となる．これから，$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 階の超スピノールの成分はつぎの値に対応する．

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{p_1 - p_2}{2} - \frac{q_1 - q_2}{2}, \\ Y &= \frac{p_1 + p_2 - 2p_3}{3} - \frac{q_1 + q_2 - 2q_3}{3} = \frac{p - q}{3} - (p_3 - q_3). \end{aligned} \tag{137.2}$$

またこれとともに

$$Z = \frac{Y}{2} + T_3 = -\frac{p - q}{3} + p_1 - q_1 \tag{137.3}$$

となる．

現在知られている粒子はすべて整数値の電荷 Y および Z をもっている．これらは n を整数として

$$p - q = 3n \tag{137.4}$$

であるような超多重項のみに現われることができる．これに対応する超スピノールは**超テンソル**と呼び，$p - q \neq 3n$ であるような真正超スピノールと区別される[1)]．

最も低い階数の超テンソルは ψ^a_b ($\psi^a_a = 0$) という量になる．これは８個の独立な成分をもち，超スピノールの代数ではベクトルの役割を果たしている（成分の数は変換群 $SU(3)$ を定義するパラメータの数と一致する）．超ベクトルの８個の成分 A_i ($i = 1, 2, \cdots, 8$)

1)　この述語は普通のスピノール代数の習慣と同様である．そしてつぎのような数学的意味をもっている．群 $SU(2)$ の変換のなかには $\mathrm{U} = \sqrt{1} = \pm 1$ の乗算が含まれる．奇数階のスピノールは $\mathrm{U} = -1$ の変換に当たって符号を変えるが，テンソル（偶数階のスピノール）は不変のままである．同様に群 $SU(3)$ のなかには変換 $\mathrm{U} = \sqrt[3]{1} = 1$, $e^{\pm 2\pi i/3}$ が含まれる．超テンソルは真正超スピノールと違って，変換 $\mathrm{U} = e^{\pm 2\pi i/3}$ では変化しない．

は成分 $\psi_a^b\,(a, b = 1, 2, 3)$ とつぎの関係式によって結ばれる[1].

$$\psi_b^a = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} A_i(\lambda_i)_b^a, \quad A_i = \mathrm{Sp}(\psi\lambda_i) \equiv \psi_b^a(\lambda_i)_a^b. \tag{137.5}$$

行列の形では，これは

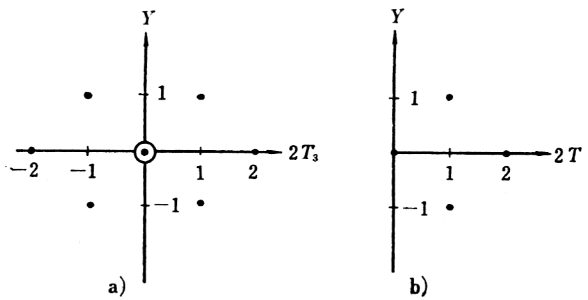
$$\psi_b^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_8 & A_1 - iA_2 & A_4 - iA_5 \\ A_1 + iA_2 & -A_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}A_8 & A_6 - iA_7 \\ A_4 + iA_5 & A_6 + iA_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}A_8 \end{pmatrix} \tag{137.6}$$

（行は $a\downarrow$，列は $b\rightarrow$）

になる.

初めの二つの超多重項の構造を詳しく考察しよう．すなわち ψ_b^a (8成分，超8重項) および ψ^{abc} (10成分，超10重項) である.

(137.2) にしたがって成分 ψ_b^a に Y，T_3 の値を付け，この値の対を平面上に描いて，第26図 a) に描かれた8重項の図を得る．座標原点の2重丸は，この Y，T_3 の値の対が2度現われることを意味している.



第 26 図

Y，T_3 の対は，Y および T の一定値をもつアイソ多重項を構成する群に分けられる．結果として第26図 b) を得る．ここでは各点がアイソ多重項を描いている．このようにし

---

1) このような定義は，普通の2階のスピノールの成分 ψ_β^α と，3次元ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分のあいだの関係と似ている．これはつぎの形に表わされる.

$$\psi_\beta^\alpha = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}_\beta^\alpha, \quad \boldsymbol{A} = \psi_\beta^\alpha\,\boldsymbol{\sigma}_\alpha^\beta.$$

て，超8重項はそのなかにアイソ1重項とアイソ3重項および二つのアイソ2重項を含んでいる．これらにはつぎのような ψ_b^a の成分が対応する．すなわち

$$
\begin{array}{lcc}
 & Y & T \\
\psi_1^1, \psi_2^2, \psi_1^2, \psi_2^1 & 0 & 0 \text{ と } 1 \\
\psi_3^1, \psi_3^2 & 1 & 1/2 \\
\psi_1^3, \psi_2^3 & -1 & 1/2
\end{array}
\tag{137.7}
$$

である．1行目では T の一定値に対応する結合を分けることができる．成分 $-\psi_3^3=\psi_1^1+\psi_2^2$ はアイソスカラーであり，$T=0$ に対応する．この結合に直交する $\psi_1^1-\psi_2^2$ は $T=1, T_3=0$ の状態に対応する．このようにして，アイソ3重項と，アイソ1重項には成分

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1^1-\psi_2^2), \quad \psi_1^2, \quad \psi_2^1 && (T=1), \\
&\sqrt{\frac{3}{2}}(\psi_1^1+\psi_2^2)=\frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1^1+\psi_2^2-2\psi_3^3) && (T=0)
\end{aligned}
\tag{137.8}
$$

が対応する．

多分，(134.2) で列挙された中間子および (134.4) で列挙されたバリオンが超8重項を構成する．バリオンの8重項は超スピノール（上の添字が行で，下の添字が列である）

$$
\psi_b^a=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\
\Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\
\Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda
\end{pmatrix}
\tag{137.9}
$$

で記述される．この表はつぎのような意味に理解する必要がある．ある粒子に対する規格化された ψ_b^a を得るためには，これらの記号を1に置き換え，残りはすべて0に置き換えることである（下記 (138.7) 参照)．

反バリオンの8重項は，超スピノール (137.9) に複素共役な超スピノール $\bar{\psi}_b^a$ によって記述される．すなわち

$$
\bar{\psi}_b^a=\psi_a^{b*}
\tag{137.10}
$$

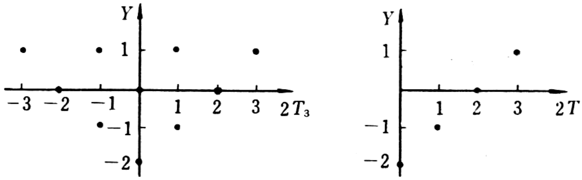
である．

中間子の8重項に対しては

$$\psi^a_b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta \end{pmatrix} \qquad (137.11)$$

となる．この超スピノールはエルミートである（$\psi^{b*}_a = \psi^a_b$）．すなわち，これには粒子がその反粒子とともに現われている[1]．

最後に，既約超スピノール ψ^{abc} で記述される超多重項を考察しよう．それは 10 個の成分から成っている（10 重項）．第 27 図には Y，T_3 および Y，T を軸にしてこの図を描



第 27 図

いてある．成分 ψ^{abc} と量子数の値のあいだの対応はつぎのようになる．

$$\begin{array}{lll} & & |YTT_3\rangle \\ \psi^{333}(1) & & |-2\,0\,0\rangle \\ \psi^{331}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & \left|-1\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \\ \psi^{332}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & \left|-1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \\ \psi^{311}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & |0\ 1\ -1\rangle \\ \psi^{312}(6) & \frac{1}{\sqrt{6}} & |0\ 1\ 0\rangle \\ \psi^{322}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & |0\ 1\ 1\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & & |YTT_3\rangle \\ \psi^{111}(1) & & \left|1\ \frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\right\rangle \\ \psi^{112}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & \left|1\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\right\rangle \\ \psi^{122}(3) & \frac{1}{\sqrt{3}} & \left|1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \\ \psi^{222}(1) & & \left|1\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle \end{array} \qquad (137.12)$$

---

1) バリオンと中間子はバリオン数 B の値が異なっている．この量子数は考察されている対称性の群とは別のものであり，ここではこのことを考慮に入れ，補助的な指標としてクォークに一定値 $B=1/3$（反クォークには $B=-1/3$）を付ける必要がある．中間子は 1 個のクォークと 1 個の反クォークから《成り立って》おり（ψ^a_b は上に一つ下に一つの添字である），バリオンは 3 個のクォークから《成り立つ》とみなす必要がある．これには上の添字が三つの超スピノール $e^{abd}\psi^c_d$ が対応する．

(記号 ψ^{abc} のあとの括弧のなかには，添字 a, b, c の交換によって得られる同じ成分の数が示されている)．記号 $|YTT_3\rangle$ はアイソスピノールの対応する成分と理解する必要がある[1]．

問　　題

二つの既約超スピノールの積，$\psi^b_a\varphi^d_c$，$\psi^{abc}\varphi_{def}$，$\psi^{abc}\varphi^d_e$ を既約部分に分解せよ．

解　積 $\psi^b_a\varphi^d_c$ を添字の対 ac および bd について対称化し，その跡を0にして，$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ 階の既約超スピノールを得る（以下階数の記号は既約超スピノール記号と考えることにする）．下の添字をもち上げるか，上の添字対を降ろして，すなわち $e^{ade}\psi^b_d\varphi^c_e$，および $e_{ade}\psi^d_b\varphi^e_c$ をつくり，abc について対称化して超スピノール $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ および $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ を得る．一つの添字対を二つの方法で縮約して（$\psi^b_a\psi^d_b$ および $\psi^b_a\varphi^c_c$）残りの対については対称化し，跡を0にして二つの超スピノール $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ を得る．最後に二つの添字対について縮約し，超スカラー $\psi^b_a\varphi^a_b$ を得る．これらの結果はつぎの形に書くことができる．すなわち

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

である．

同様な方法で

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

が得られる．

§138.　超スピノール演算子

ユニタリー対称性を粒子の物理的特性のあいだの関係，およびいろいろな反応の確率のあいだの関係を確立するために適用することは，結局一定の超スピノールの性質をもつ演算子の行列要素の計算に帰してしまう．

その変換性については超ベクトルの成分であるような演算子 $\mathbf{F}_i(i=1,2,\cdots,8)$ を考え

1)　スピン 3/2 をもつバリオンの 10 重項が知られている．そのなかには九つの不安定な粒子（共鳴）と，また準安定なバリオン Ω^-（アイソ1重項）とが含まれている．

よう．波動関数の超スピノール添字に対するその作用では，このような演算子は対応する超スピン成分，すなわち行列 λ_i を掛けることに帰してしまう[1]．したがって，$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ 階の超スピノール波動関数 ψ に働くベクトル演算子の一般形はつぎのようになる．

$$\mathbf{F}_i = c_1 \Lambda_i + c_2 \bar{\Lambda}_i, \quad \Lambda_i = \sum_{r=1}^{p} \lambda_i^{(r)}, \quad \bar{\Lambda}_i = \sum_{r=1}^{q} \bar{\lambda}_i^{(r)} \tag{138.1}$$

ここで λ_i と $\bar{\lambda}_i$ とは同一の行列であるが，それぞれ関数 ψ の上および下の添字に働く．すなわち

$$(\lambda_i\psi)^a = (\lambda_i)^a_b \psi^b, \quad (\bar{\lambda}_i\psi)_a = (\lambda_i)^b_a \psi_b \tag{138.2}$$

である．添字 r は与えられた行列が作用する添字の番号を示している．上および下の超スピノール添字は本質的に異なる変換性に対応するものであることを思い起こそう．したがって，成分 Λ_i および $\bar{\Lambda}_i$ は一般の場合には (138.1) のなかで異なる独立な係数を伴っていなければならない．

(137.6) にしたがって，2階の混合超スピノールの成分は超ベクトルの成分とくらべられる．これにしたがって，演算子 $\mathbf{F}_i$ の代りに演算子 $\mathbf{F}^a_b (a, b = 1, 2, 3;\ \mathbf{F}^a_a = 0)$ を導入することができる．これらに対して (138.1) の一般形はつぎのように書かれる．

$$\mathbf{F}^a_b = c_1 \Lambda^a_b + c_2 \bar{\Lambda}^a_b, \tag{138.3}$$

$$\Lambda^a_b = \sum_{r=1}^{p} \lambda^{a(r)}_b, \quad \bar{\Lambda}^a_b = \sum_{r=1}^{q} \lambda^{a(r)}_b. \tag{138.4}$$

ここで行列 λ^a_b は (137.6) にしたがって λ_i を使って表わされる．そのあらわな形はつぎのようになる．

$$\begin{gathered}
\lambda^2_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^3_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^3_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^1_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^2_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^1_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^2_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad
\lambda^3_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{138.5}$$

これらの行列が実行列であり，λ^b_a は λ^a_b に対して 転置行列 であることに注目しよう．すなわち

---

1) 普通のベクトル演算子が，波動関数のスピン添字に対する作用ではパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ で表わされることと同様である．

$$(\lambda_a^b)_{a'}^{b'} = (\lambda_b^a)_{b'}^{a'}$$

である[1].

例として，超多重項の質量の分岐を考察しよう．これはユニタリー対称性を破る強い相互作用の《死んだ》部分によってひき起こされる (M. Gell-Mann, 1961 ; S. Okubo, 1962).

しかしながら，この相互作用は完全な $SU(3)$ 対称性はもたないが，一般に強い相互作用に特徴的な荷電対称性はもっている．したがって，質量の分岐を定義する演算子はアイソスカラーでなければならない．同時に群 $SU(3)$ 全体に対してはスカラーでない最も簡単なアイソスカラーは，超スピノールの $^3_3$－成分である．質量の分岐の演算子の性質がちょうどこのようなものであると仮定するのが自然である（これを m_3^3 と置く）．このときアイソ多重項は分岐しないままである．さらにその分岐は電磁的相互作用とも結びついていなければならない．

質量に対する求める補正の超8重項の成分（演算子 m_3^3 の平均値）は，最も一般的な形では

$$\Delta m = c_1 \bar{\phi}_b^c (\lambda_3^3)_a^b \phi_c^a + c_2 \bar{\phi}_c^b (\lambda_3^3)_b^a \phi_a^c \qquad (138.6)$$

の形の式で与えられる ($\bar{\phi}_c^b = \phi_b^{c*}$)．この公式による計算に当たって，(137.9)（バリオン8重項）のなか，あるいは (137.11)（中間子8重項）のなかで，ϕ_a^b の成分のなかから粒子の一つに対応する記号だけを順に0でないとして残す必要がある．このようにして，たとえば

$$(\phi_b^a)_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\phi_b^a)_\Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (\phi_b^a)_{\Sigma^-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (138.7)$$

である．このような方法で，バリオン8重項の粒子の質量に対してつぎの式を得る．

$$m(\Xi) = m_0 + \frac{2c_1 - c_2}{3}, \quad m(N) = m_0 + \frac{2c_2 - c_1}{3},$$

$$m(\Sigma) = m_0 - \frac{c_1 + c_2}{3}, \quad m(\Lambda) = m_0 + \frac{c_1 + c_2}{2}$$

(m_0 は非摂動8重項の質量である)．m_0，c_1，c_2 を消去して，関係式

$$\frac{1}{2}[m(\Xi) + m(N)] = \frac{1}{4}[m(\Sigma) + 3m(\Lambda)] \qquad (138.8)$$

を得る．

---

1) 行列の番号の添字 a, b と，これらの行列の要素をかぞえる添字 a', b' とを混同しないこと！

中間子8重項に対しては $\bar{\varphi}_b^a = \varphi_a^b$ である．そして (138.6) の2項のなかの積は一致する．$c_1 = c_2 = c$ と置いて

$$m(K) = m_0 + \frac{c}{3}, \quad m(\pi) = m_0 - \frac{2c}{3}, \quad m(\eta) = m_0 + \frac{2c}{3}$$

を得る．c と m_0 を消去して

$$m(K) = \frac{1}{4}[m(\pi) + 3m(\eta)] \tag{138.9}$$

を得る[1)]．

10重項に対しては波動関数 ψ^{abc} は上の添字だけをもつ対称超スピノールである．したがって (138.3) のなかでただ1項だけが残り，質量の補正はつぎの式で決定される．

$$\Delta m = 3c\bar{\psi}_{abd}(\lambda_3^3)_c^d \psi^{abc}$$

(ここで $\bar{\psi}_{abc} = \psi^{abc*}$ である)．(137.12) を使って，これから10重項に含まれるアイソ多重項の質量 $m(T)$ に対してつぎの式を得る．

$$m(0) = m_0 + 2c, \quad m\left(\frac{1}{2}\right) = m_0 + c,$$
$$m(1) = m_0, \qquad m\left(\frac{3}{2}\right) = m_0 - c.$$

m_0 および c を消去して

$$m(0) - m\left(\frac{1}{2}\right) = m\left(\frac{1}{2}\right) - m(1) = m(1) - m\left(\frac{3}{2}\right) \tag{138.10}$$

を得る．

---

1) 中間子8重項に対しては，もしもこの公式で m を m^2 で置き換えると，すなわち演算子 m_3^3 の中心値が質量の平方の変化を決定すると考えれば，実験データとのもっと良い一致が得られる．これの基礎として，物理的な量（散乱振幅）は不変量 $p^2 = m^2$ の関数であることを示すことができる．したがって，m でなくて m^2 の方がより自然な量である．バリオン8重項に対しては $\Delta m \ll m_0$ であり，二つの仮定のあいだの差は重要ではない．

第15章　ハドロンの電気力学

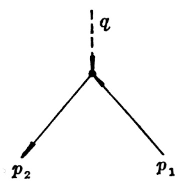
§139.　ハドロンの電磁形状因子

現在の理論の枠内でハドロンの電気力学の完全な理論をつくることは不可能である．明らかにハドロンの電磁相互作用を決定する方程式を，ずっと強力な強い相互作用を考慮することなしに組み立ててはいけない．強い相互作用の理論がないので，あらわな形でハドロンカレントをつくり，それを使って量子電気力学の相互作用を記述することはできない．このような事情のもとでは，現象論的な量としてハドロンカレントを導入することに限った方がよい．これは相互作用の力学についてのいかなる仮定とも無関係で，一般的な運動学的要求だけからその構造が決まるようなものである．電磁相互作用は前と同じように

$$-e(JA) \tag{139.1}$$

の形をもっている．ここでカレントは（電子電流 j とは違って）大文字の記号 J と書かれた．この相互作用の大きさの程度が，同じ基本電荷 e で与えられるので，前と同様に摂動論の方法を用いることができる．

自由に運動しているハドロン（そのハドロン自身の何らかの転換は伴わない）の二つの状態間の遷移カレントを確立しよう．このカレントは《3端子》



(139.2)

に含まれる．これ自体何かもっと複雑な図形(たとえば電子のハドロンによる散乱の図形)に一部分として含まれていてもよい．図形 (139.2) のなかの破線は仮想的光子線を表わしている．これは現実の光子に対応することはできない．それは自由粒子はこのような光子を吸収（あるいは放出）することができないからである．このとき

$$q^2 = (p_2 - p_1)^2 < 0$$

となる．初めにスピン0のハドロンを考察しよう．u_1 および u_2 はハドロンの始めと終りの状態の波動振幅で，そこでは 4－運動量 p_1 および p_2 をもつ．スピン0の粒子に対しては，この振幅はスカラー（あるいは擬スカラー）である[1]．これら二つの状態間のハドロンの遷移カレント J_{fi} は u_1 および u_2^* について双1次でなければならない．これを

$$J_{fi} = u_2^* \Gamma u_1 \tag{139.3}$$

の形に書こう．ここで 4－ベクトル Γ は未知の頂点演算子である（図形（139.2）中の黒丸）．もしも $u_1 = u_2 = 1$ と置けば，単に $J_{fi} = \Gamma$ となる．

カレントの保存は電気力学におけるカレントの普遍的性質であり，ゲージ不変性の理論と結びついている．運動量表示でそれは遷移カレントと光子の 4－運動量 $q = p_2 - p_1$ との直交性によって表わされる．すなわち

$$qJ_{fi} = 0 \tag{139.4}$$

である．今の場合にこれは Γ が

$$\Gamma = PF(q^2) \tag{139.5}$$

の形をもたなければならないことを意味している． ここで $P = p_1 + p_2$ であり，$F(q^2)$ は唯一の独立な不変変数である平方 q^2 のスカラー関数である．ハドロンの種類は遷移の際に不変であるから，$p_1^2 = p_2^2 = M^2$ (M はハドロンの質量) であり，したがって $Pq = 0$ である．

（139.5）からの Γ を使った行列要素（139.3)（およびそれとともに演算子 J 自体は）真正 4－ベクトルである．したがって，相互作用の演算子（139.1）は真正スカラーである．このようにして，スピン0をもつハドロンの電磁相互作用は自動的に P－不変量であることがわかる．それはまた T－不変量であることもわかる．実際，まず第一に時間反転は始めと終りの 4－運動量を交換する．このとき和 $P = p_1 + p_2$ は変わらない．第二に時間反転は 4－運動量の時間成分は変えないで空間成分の符号を変える．また 4－ポテンシャル A も同じように変換される．したがって積 JA は変わらない．

不変関数 $F(q^2)$ はハドロンの**電磁形状因子**と呼ぶ．現象論の枠内では，もちろん，その形を確立することはできない．しかしながら，この関数は（いま考えられている $q^2 < 0$

---

1) 平面波は $\psi = u/\sqrt{2\varepsilon} \cdot e^{-ipx}$ の形に書かれることを思い起こそう．単位体積あたり1粒子の規格化は（スピン0をもつ粒子に対しては）$u^* u = 1$ によってスカラーを規格化することに対応する． このときは簡単に $u = 1$ と置くことができる（§10）．われわれは以下では §65 での置き方に対応した振幅 u_1, u_2 に関して遷移カレントを定義しよう．

の領域で）実であると主張することはできる．これは電子の形状因子に対して§113で適用されたのと同じ考察から出てくる．すなわち，$q^2<0$ のときにはいつもユニタリー性の関係式の右辺に現われるはずの中間状態が存在しないからである．したがって行列 M_{fi} およびそれとともに J_{fi} はエルミートであることがわかる．

$q=0$ のとき，始めと終りの状態は一致する．したがって J_{fi} は対角行列要素になる．特に，$e(J^0)_{ii}/2\varepsilon_i = eF(0)$ は電荷密度であり（単位体積あたり1粒子の規格化である！）粒子の全電荷と一致する．

電気的に中性な粒子に対しては $F(0)=0$ である．しかしながら，これはけっして粒子が真性中性であることを意味しないことを強調しよう．もしも粒子が真性中性であって一定の荷電偶奇性をもてば，すべての q^2 に対して $F(q^2)\equiv 0$ である．すなわち，カレント演算子は荷電奇であり（§13），同一のハドロンの二つの状態間の行列要素は0に等しい[1]．

スピン1/2をもつハドロンに移ろう．この場合波動振幅 u_1，u_2 は双スピノールで，ハドロンカレントは

$$J_{fi} = \bar{u}_2 \Gamma u_1 \tag{139.6}$$

の形をもっている．$\bar{u}_2$ と u_1 および4－ベクトル p_1, p_2 の双1次結合から，((139.4) を満足する）真正4－ベクトル量も擬ベクトル量もつくることができる．したがって相互作用の P－不変性の条件は自動的には満足されずに，付加的に設定されなければならない[2]．§113で示されたように，この条件があるとき頂点演算子は二つの独立な実の（$q^2<0$ のとき）形状因子を含んでいる．これを今

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu &= 2M(F_e - F_m)\frac{P^\mu}{P^2} + F_m\gamma^\mu = 2M\left(F_e - \frac{q^2}{4M^2}F_m\right)\frac{P^\mu}{P^2} - \frac{F_m}{2M}\sigma^{\mu\nu}q_\nu \\ &= (4M^2F_e - q^2F_m)\frac{\gamma^\mu}{P^2} + \frac{2M}{P^2}(F_e - F_m)\sigma^{\mu\nu}q_\nu \end{aligned}\tag{139.7}$$

の形に書こう．ここで $F_e(q^2)$ と $F_m(q^2)$ は不変形状因子である（M はハドロンの質量である）．等式 $P^2+q^2=4M^2$ と (113.5) を使って，上記の三つの等式は同値であるこ

1）もちろん，これはこのようなハドロンが電磁場と相互作用をしないことを意味するものではない．二つのカレント演算子の積 $\mathrm{J}(x)\mathrm{J}(x')$ だけで荷電偶であり，その行列要素は同一の荷電偶奇性をもつ状態間の遷移に対して0と異なる．したがって，真性中性ハドロンは光子の散乱，また2光子の同時放出，すなわち α についてより高次の過程に加わることができる．

2）現在の実験データでは，ハドロンの電磁相互作用における空間偶奇性の保存の破綻は認められない．

とが容易に確かめられる[1]。

電磁形状因子は，その概念が§71で導入されたカテゴリーの不変振幅である．それは仮想的光子の（その消滅型チャネルで）ハドロンと反ハドロンへの崩壊のような《反応》の振幅とみなすことができる．仮想的光子はスピン1をもつ《粒子》である．これのスピン 1/2 をもつ二つの粒子への崩壊は二つの独立な振幅によって記述されなければならない．これは対応する螺線振幅 $\langle \lambda_b \lambda_c | S^J | \lambda_a \rangle$（§70参照）を考慮することによって容易に確かめられる．実際に P－不変性のために，S－行列の四つの0と異なる要素は対になって互いに等しい．すなわち

$$\left\langle \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \middle| S^1 \middle| 1 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \middle| S^1 \middle| -1 \right\rangle,$$
$$\left\langle \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \middle| S^1 \middle| 0 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \middle| S^1 \middle| 0 \right\rangle$$

である．

T－不変性（あるいは消滅型チャネルでは C－不変性）は，これらの要素のあいだに新しい関係を付け加えない．この事情はつぎのことと結びついている．それは頂点演算子 (139.7) によって記述される相互作用は自動的に T－不変量であるということである（しかしながら，このような立場はもっと大きいスピンをもつ粒子に対してはもう成り立たない）．

$q\to 0$ のとき (139.7) のなかの（q についての）0次および1次の補正項はつぎのようになる．

$$\Gamma^\mu = F_e(0)\gamma^\mu - \frac{1}{2M}[F_m(0) - F_e(0)]\sigma^{\mu\nu} q_\nu. \qquad (139.8)$$

これから，$F_e(0)$ は粒子の電荷（e を単位とした）であり，$F_m(0) - F_e(0)$ はその異常磁

---

1) (139.7) にしたがった形状因子 (R. Sachs, 1962) が目的にかなっていることは以下で明らかにされる．文献ではまた (113.6) のなかの f および g と同様に定義される形状因子 F_1, F_2 もまた使われる．すなわち

$$\Gamma^\mu = F_1\gamma^\mu - \frac{F_2}{2M}\sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

である．これは F_e, F_m と関係式

$$F_e = F_1 + F_2\frac{q^2}{4M^2}, \quad F_m = F_1 + F_2$$

で結ばれている．

気モーメント（$e/2M$ を単位とした）であることがわかる（§113参照）[1].

今までのところは運動量空間の形状因子だけを使ってきた．もちろん，観察されている現象の記述にはこれで十分である．単に説明のためには，しかしながら，それをある座標の関数のフーリエ写像とみなして，形状因子にもっとわかりやすい解釈を与えることができる．

このためには $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0$ であるような基準系（いわゆる**ブライト系**）を選ぶのが便利である．$P^2>4M^2>0$ であるから，これはいつも可能である．この系では $\varepsilon_1=\varepsilon_2\equiv\varepsilon$ であり，したがって $P^0=2\varepsilon$ である．そして4-ベクトル q の成分は $q^0=0$, $\boldsymbol{q}=2\boldsymbol{p}_2=-2\boldsymbol{p}_1$ である．スピン0のハドロンに対しては，遷移カレントはブライト系では特別に簡単な形になる．すなわち

$$\frac{J^0_{fi}}{2\varepsilon}=F(-\boldsymbol{q}^2),\quad \boldsymbol{J}=0$$

である．ここから，$F(-\boldsymbol{q}^2)$ は密度

$$\rho(\boldsymbol{r})=e\frac{1}{(2\pi)^3}\int F(-\boldsymbol{q}^2)e^{i\boldsymbol{qr}}\,d^3q \tag{139.9}$$

の静的電荷分布のフーリエ写像として議論できることがわかる．この意味で粒子の空間的電磁構造を問題にすることができる．すなわち $F=\text{const}=1$ は $\rho(\boldsymbol{r})=e\,\delta(\boldsymbol{r})$ になるはずである．形状因子の $\boldsymbol{q}$ への依存性は，電荷分布の点電荷からのずれと解釈される．しかしながら，この解釈には文字通りの意味を与えるべきではないことを強調しよう．関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ は一般に特定の基準系に関するものではない．したがって $\boldsymbol{q}$ の値のおのおのに固有の系が対応することになる．

$\boldsymbol{q}^2\ll M^2$ であるような非相対論的極限では，散乱の際の粒子のエネルギーの変化は無視できて，ブライト系は普通の粒子の静止系と一致し $\boldsymbol{q}$ には依存しない．この近似では粒子の始めと終りの状態は同一で，遷移カレントは対角行列要素になり，関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷の空間的分布の現実の意味を獲得することになる．しかしながら，素粒子に対しては，形状因子が大きく変化するような $|\boldsymbol{q}|$ の特徴的な値はわずかに M より小さい．したがって素粒子に対しては非相対論的極限でのみ $F(-\boldsymbol{q}^2)$ を $F(0)$ に置き換えること，つまり粒子を点電荷とみなすことができる．原子核に対しては事情は違ってくる．原子核の質量 M はそのなかの核子の数 A に比例する．しかし特徴的な値は $|\boldsymbol{q}|\sim 1/R$，すなわち $A^{-1/3}$

1) このようにして，陽子に対しては $F_e(0)=1$, $F_m(0)-F_e(0)=1.793$ である．中性子に対しては $F_e(0)=0$, $F_m(0)=-1.913$ である（磁気モーメントは全体が《異常である》）．

に比例する（R は原子核の半径である）．したがって十分重い原子核に対しては $\boldsymbol{q}^2 \ll M^2$ が特徴的である．このようにして，非相対論的な考察はすべての主要な領域で許される．このために原子核の電磁的構造の概念は非常にはっきりした意味をもっている．

スピン 1/2 の粒子に対しては（139.7）から，ブライト系でつぎの式を得る．

$$J^0_{fi} = (F_e - F_m)\frac{M}{\varepsilon}(\bar{u}_2 u_1) + F_m(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = F_e(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1), \qquad (139.10)$$

$$\boldsymbol{J}_{fi} = \frac{1}{2M} F_m[i\boldsymbol{q}\cdot(\bar{u}_2 \boldsymbol{\Sigma} u_1)]. \qquad (139.11)$$

ここで $\boldsymbol{\Sigma}$ はスピンの3次元演算子（行列）(21.21）である．また（139.10）では等式

$$\varepsilon(\bar{u}_2 \gamma^0 u_1) = M(\bar{u}_2 u_1)$$

が使われた．これは $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ のときの u_1 および $\bar{u}_2$ に対するディラック方程式を使って容易に確かめられる．

遷移カレント（139.10）の時間成分は《点状粒子》，すなわち電子に対する式との違いは，因子 $F_e(-\boldsymbol{q}^2)$ だけである．したがって（139.9）によって形状因子 F_e（これを**電荷の形状因子**と呼ぶ）が《電荷の空間分布》を記述するということができる．

同様に，3次元ベクトル（139.11）には電流密度 $e\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r})$ の《空間分布》と対応させることができる．ここで

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{2M}\boldsymbol{\Sigma}\int F_m(-\boldsymbol{q}^2)e^{i\boldsymbol{qr}}\,d^3q$$

は《磁気モーメントの密度》である．このようにして，形状因子 F_m（これを**磁気的形状因子**と呼ぶ）は磁気モーメントの空間分布の密度と解釈することができる．もちろん，前に電荷分布に関して行なったのと同じ注釈がついている．このとき F_m は，《正常》ディラック磁気モーメントと同様に，ハドロン特有の《異常》モーメントも含んでいる．後者の密度は差 $F_m - F_e$ に対応する．

ハドロンの電磁形状因子の特異点は，電子のと同様に，引数 $t = q^2 = -\boldsymbol{q}^2$ の正の実数値に存在すると考えるのが自然である．これから，$r \to \infty$ のときの分布 $\rho(r)$（および $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{r})$）の分布の漸近的振舞について一定の結論を下すことができる．すなわち，§111 で（111.3）から（111.4）へ移るのに使われたのと同じ変換は，r が大きいときに積分（139.9）を

$$\rho(r) \backsim e^{-\kappa_0 r}$$

になるような結果へと導く．ここで κ_0^2 は形状因子 $F(q^2)$ の最初の特異点の横座標である

(57 頁の脚注もまた参照のこと). 通常のように, 最も近い特異点は, 仮想的光子による(おのおの質量 M_0 をもつ) ハドロン対生成のしきいによって与えられるとすれば, $\kappa_0 = 2M_0$ である.

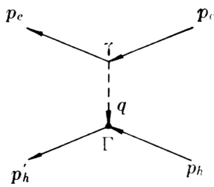
§140. ハドロンによる電子散乱

前節で得られた公式をハドロンによる電子の弾性散乱に適用しよう. ハドロンの始めと終りの 4-運動量を p_h および p'_h とし, 電子の 4-運動量を p_e および p'_e と置く. このとき

$$p_e + p_h = p'_e + p'_h \tag{140.1}$$

である.

いま考えられている過程は図形



(140.2)

で記述される. 電子による仮想的光子の放出は普通の頂点演算子 γ に対応する. それのハドロンによる吸収は演算子 Γ である.

スピン 1/2 をもつハドロンの最も興味のある場合を考察しよう (たとえば, 陽子あるいは中性子による電子散乱である).

図形 (140.2) には振幅

$$M_{fi} = 4\pi e^2 \frac{1}{q^2} (\bar{u}'_e \gamma^\mu u_e)(\bar{u}'_h \Gamma_\mu u_h) \tag{140.3}$$

が対応する. この振幅を使った断面積の計算は, §82 で行なわれた計算と原理的な違いはない. このとき演算子 Γ は (139.7) のなかの 1 番目の形に書くのが便利である.

偏りのない粒子の散乱に対してはつぎのような結果が得られる. すなわち

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha^2 dt}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]t^2\left(1-\frac{t}{4M^2}\right)} \times \left\{F_e^2[(s-u)^2+(4M^2-t)t] - \frac{t}{4M^2}F_m^2[(s-u)^2-(4M^2-t)(4m^2+t)]\right\} \tag{140.4}$$

である．ここで M はハドロンの質量，m は電子の質量であり

$$s=(p_e+p_h)^2,\quad t=q^2=(p_e-p'_e)^2,\quad u=(p_e-p'_h)^2,$$
$$s+t+u=2m^2+2M^2$$

である．

いくつかの極限の場合を考察しよう．

重い原子核による電子散乱に対しては，電子から原子核への運動量転移 $|\boldsymbol{q}|$ は原子核の質量にくらべれば小さく，(R を原子核の半径として) $1/R$ にくらべれば小さくない．したがって原子核を点とみなしてはいけないような場合が重要である．このような場合には，重心系は原子核に静止した系と近似的に一致し，原子核の反跳は無視することができて電子のエネルギーは不変である．このとき

$$-t=\boldsymbol{q}^2\ll M^2,\quad \pi|dt|=\boldsymbol{p}_e^2\,do'_e,$$
$$s-M^2\approx M^2-u\approx 2M\varepsilon_e$$

であり，公式 (140.4) は

$$d\sigma=\frac{\alpha^2\,do'_e}{\boldsymbol{q}^4}(4\varepsilon_e^2-\boldsymbol{q}^2)F_e^2(-\boldsymbol{q}^2)\tag{140.5}$$

の形をとる．この近似では断面積のなかに電気的形状因子だけが残り，(140.5) は静的な電荷分布による電子散乱に対して成立する公式 (81.5) に対応する．

同じ極限 $\varepsilon_e\ll M$ (M は中性子の質量である) の場合，静止中性子による電子散乱の際に，形状因子は $\boldsymbol{q}=0$ のときの値で置き換えることができる．なぜかというと，すでに指摘したように，個々の核子に対して電荷分布に特徴的な《半径》は $1/M$ と同程度である[1]．中性子は電気的に中性であるために $F_e(0)=0$ である．そして断面積は

$$d\sigma=\alpha\mu^2\left[\frac{4(\varepsilon_e^2-m^2)}{\boldsymbol{q}^2}+1\right]do'_e=\alpha\mu^2\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}+1\right)do'_e\tag{140.6}$$

の形をとる．ここで $\mu=e/2M\cdot F_m(0)$ は中性子の磁気モーメントで，ϑ は散乱角である．この公式は静止した点状磁気モーメントによる電子散乱に対応する．

最後に，$|\boldsymbol{q}|\gg m$ のとき超相対論的電子の核子による散乱断面積に対する公式を書こう．前と同じように $\boldsymbol{q}^2$ を重心系における運動量転移の平方と考えよう．したがって不変量 $t=-\boldsymbol{q}^2$ である．始めの核子が静止している系 (実験室系) では

$$-t\approx 2(p_e p'_e)=2\varepsilon_e\varepsilon'_e(1-\cos\vartheta)$$

---

1) 核子の2乗平均の《半径》の実験値は $\approx 3.5/M\approx 1/2m_\pi$ (m_π はパイオンの質量である)．

が成り立つ. ここで ε_e, ε'_e は始めと終りの電子のエネルギーで, ϑ はこの系での散乱角である. 超相対論的な場合には, ε'_e と ϑ とは光子散乱のときと同じ公式 ((86.8) 参照) で結びつけられる.

$$\frac{1}{\varepsilon'_e}-\frac{1}{\varepsilon_e}=\frac{1}{M}(1-\cos\vartheta).$$

したがって

$$-t=\frac{4\varepsilon_e^2\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}{1+\dfrac{2\varepsilon_e}{M}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}, \tag{140.7}$$

$$\pi\, d|t|=\frac{\varepsilon_e^2\, do'_e}{\left(1+\dfrac{2\varepsilon_0}{M}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}\right)^2}=\varepsilon_e^2\left(1-\frac{q^2}{2\varepsilon_e M}\right)^2 do'_e \tag{140.8}$$

が成り立つ. ここで $do'_e=2\pi\sin\vartheta\, d\vartheta$ である. 公式 (140.4) のなかではつねに電子の質量 m は落としてもよい. すべての量を t および $s-M^2=2M\varepsilon_e$ を使って表わして

$$d\sigma=\frac{\pi\alpha^2 d|t|}{\varepsilon_e^2 t^2}\left\{F_e^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e+t)^2}{4M^2-t}+t\right]-\frac{t}{4M^2}F_m^2(t)\left[\frac{(4M\varepsilon_e+t)^2}{4M^2-t}-t\right]\right\} \tag{140.9}$$

を得る. あるいは (140.7), (140.8) を使って

$$d\sigma=do'_e\frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2}\frac{\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}}{\sin^4\dfrac{\vartheta}{2}}\frac{1}{1+\dfrac{2\varepsilon_e}{M}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}\left\{\frac{F_e^2-\dfrac{t}{4M^2}F_m^2}{1-\dfrac{t}{4M^2}}-\frac{t}{2M^2}F_m^2\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}\right\} \tag{140.10}$$

となる (M. Rosenbluth, 1950).

形状因子 F_e および F_m が断面積に独立な寄与をすることに注目すると, これらのあいだの干渉項は存在しない. これは上で行なった形状因子の選択が目的にかなっていたことの証明になる.

問　題

スピン0のハドロンによる電子の散乱断面積を見いだせ.

解 (139.5) を使って, (140.3) の代りに

$$M_{fi}=\frac{4\pi e^2}{q^2}(\bar{u}'_e\hat{P}_h u_e)F(q^2)$$

が成り立つ. 断面積に対して

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dt[(s-u)^2+(4M^2-t)t]}{[s-(M+m)^2][s-(M-m)^2]t^2}F^2(t)$$

が得られる（記号は (140.4) のと同じである）．$|t| \gg m^2$ のとき

$$d\sigma = do'_e \frac{\alpha^2}{4\varepsilon_e^2}\frac{\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}}{\sin^4\dfrac{\vartheta}{2}}\frac{F^2(t)}{1+\dfrac{2\varepsilon_e}{M}\sin^2\dfrac{\vartheta}{2}}$$

となる（記号は (140.10) のと同じである）．

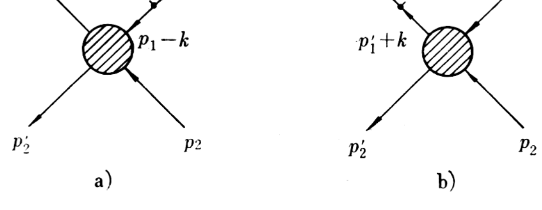
§141.　制動輻射に対する低エネルギー定理

§95 では，粒子の衝突の際の振動数が無限に 0 に近い光子放出の過程が研究された．この過程の振幅が ω に逆比例し，軟光子放出を伴わない同じ衝突の振幅を使って簡単に表わされることがわかった（後者を以下では《弾性》散乱の振幅と言うことにし，それを $M_{fi}^{(弾)}$ としよう[1]）．ω についてのつぎの近似では

$$M_{fi} = M_{fi}^{(-1)} + M_{fi}^{(0)} \tag{141.1}$$

である．ここで，主項（$\backsim \omega^{-1}$）に ω に依存しない（$\backsim \omega^0$）補正項が付け加えられる．この補正項も（主項と同様に）また $M_{fi}^{(弾)}$ によって表わされることがわかるだろう．これは（われわれにとっては未知の）ハドロンの電磁的構造の詳細には依存しない．この主張は制動輻射に対する**低エネルギー定理**と呼ばれる (F. E. Low, 1958)．

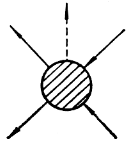
§95 でわれわれはつぎのことを見てきた．軟光子放出の振幅（(141.1) の第 1 項に対応する）の主な寄与は，光子が始めあるいは終りの粒子から直接に輻射されるような図形から生じている．これはつぎの形の図形である．



(141.2)

これに反して

1)　§95 では $M_{fi}^{(0)}$ と置かれた．



c)　　(141.3)

の形の図形では光子線は図形の内部から出ている．グラフ (141.2) に対して特徴的なことは，これが一つの（始めあるいは終りの）仮想的ハドロン線を切断することにより二つの部分に切り離されることである．言いかえれば，これは与えられた局面では重要な性質を説明している．すなわち，1個のハドロンをもつ1粒子性中間状態の存在である．§80 では，ユニタリー性の要求はそれだけですでに振幅中の極性特異点の存在へと導くことを見てきた．

A. スピン0のハドロン

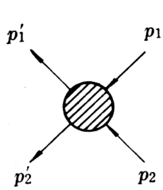
簡単のために，衝突する2個のハドロンのうち（始めの）1個だけが帯電しており（したがって輻射可能である），両方のハドロンがスピンをもたないと仮定しよう．このようなハドロンの波動振幅 u はスカラーであり，これを1と置こう．

このとき，図形（141.2, a）の極の部分から振幅への寄与は

$$iM_{fi}^{(\mathrm{a})}=\sqrt{4\pi}\,e_\mu^*(2p_1^\mu-k^\mu)Z_1eF\frac{1}{(p_1-k)^2-M^2}\,i\Gamma \qquad (141.4)$$

の形になる．1番目の因子は光子 k に対応する（e_μ はそれの偏りの4－ベクトルである）．2番目の因子はハドロンの電磁頂点（図形上の太い点）に対応する．これは (139.5) の形に書かれる．このとき Z_1e はハドロンの電荷，また F はその形状因子である．3番目の因子は仮想的ハドロン p_1-k の伝播関数である（M はその質量）．最後に因子 $i\Gamma$ は残りのブロックすべてを表わしている．これと《弾性》過程の振幅

$iM_{fi}^{(弾)}=$



(141.5)

との違いは，現実のハドロン p_1 を仮想的ハドロン p_1-k に置き換えることである．

(141.4) の ω の冪展開の第1項のなかにはつぎのような項がある．すなわち，1) ω に

逆比例する項，2) ω には依存しないが $\boldsymbol{k}$ の方向に依存する項，3) ω, $\boldsymbol{k}$ すべてに依存しない項である．第3の種類の項（これだけ）が，《非特異》図形，すなわち極性特異点を含まない（141.3）の型の図形からと，図形（141.2）の非極性部分から出てくる．このような項はすべて一緒に，ゲージ不変性の条件を使って始めの二つの型の項から一意的に決定され，したがって特別な計算を必要としないことがわかる．

《弾性》過程の振幅（141.5）は二つの不変変数

$$s=(p_1+p_2)^2=(p'_1+p'_2)^2,\quad t=(p'_2-p_2)^2 \tag{141.6}$$

にのみ依存する．p_1 の p_1-k への置き換えは，s を $(p_1-k+p_2)^2$ に変換するだけでなく，運動量 p_1-k の《非物理性》を特徴づける新変数

$$(p_1-k)^2-M^2=-2p_1k$$

への依存性も導入する．そして，この新しい（小さい）変数についての展開の第1項だけで，振幅（141.4）の特異性を消去する．したがってそのなかでは k に依存しない項だけを与える．上述の理由で以後この項はわれわれには興味がない．このようにしてつぎのような重要な結論に到達する．それは（141.4）のなかの Γ という量の代りに，物理的振幅 $M_{fi}^{(弾)}(s,t)$ を代入することができる．ただそのなかで変数の置き換え

$$s\longrightarrow(p_1+p_2-k)^2=s-2k(p_1+p_2) \tag{141.7}$$

を行なったものを代入すればよい．この展開の第1項は

$$\Gamma\longrightarrow M_{fi}^{(弾)}(s,t)-2(kp_1+kp_2)\left(\frac{\partial M_{fi}^{(弾)}}{\partial s}\right)_t$$

となる．

まったく同じ理由で，電磁形状因子 F がここでは，二つのハドロン端（p_1 および p_1-k）中の一つだけが物理的であるような頂点のものであることは重要ではない．したがってそれは，§139 で考察された，二つの物理的な端をもつ頂点の形状因子で置き換えることができる．そしてこの場合光子 k は現実的であるから，$F(k^2)=F(0)=1$ である．

このようにして，(141.1) から

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(a)}&=Z_1e\sqrt{4\pi}\,\frac{2(e^*p_1)}{-2(kp_1)}\,M_{fi}^{(弾)}(s,t)\\&\quad-Z_1e\sqrt{4\pi}\,2(e^*p_1)\frac{1}{-2(kp_1)}\,2(p_2k)\frac{\partial M_{fi}^{(弾)}}{\partial s}+\cdots\end{aligned} \tag{141.8}$$

を得る．ここで…は k にはまったく依存しない項である（しかし（141.8）の第2項は $\boldsymbol{k}$ の方向に依存する）．同様にして，図形（141.2, b）から M_{fi} への寄与は（141.8）と違

って p_1, p_2, k を p'_1, p'_2, $-k$ で置き換えられていることがわかる. 結果として展開の主項に対してはわれわれがすでに知っている式

$$M_{fi}^{(-1)} = Z_1 e\sqrt{4\pi}\left(\frac{p'_1 e^*}{p'_1 k} - \frac{p_1 e^*}{p_1 k}\right) M_{fi}^{(弾)} \tag{141.9}$$

が得られる ((95.5) 参照).

k に依存しない項は, 振幅が全体としてゲージ不変にならなければならぬという要求から決定される. それは置き換え $e^* \to e^* + \mathrm{const}\cdot k$ のときに不変でなければならない. すなわち, $M_{fi} = e^*_\mu J^\mu$ の形をもたなければならない. このとき $k_\mu J^\mu = 0$ である. 容易にわかるように, このために (141.8) には k に依存しない項

$$-2Z_1 e\sqrt{4\pi}(p_2 e^*)$$

を付け加える必要があり, 図形 (141.2, b) に対しても同様である. 結果として最終的に

$$M_{fi}^{(0)} = 2Z_1 e\sqrt{4\pi}\, e^*_\mu \left[p_1^\mu \frac{(p_2 k)}{(p_1 k)} - p_2^\mu + p_1'^\mu \frac{(p'_2 k)}{(p'_1 k)} - p_2'^\mu\right] \frac{\partial M_{fi}^{(弾)}}{\partial s} \tag{141.10}$$

を得る.

これが設定された問題の解である. つぎのようにするとこれをもっとまとまった形にすることができる. すなわち, 恒等的な置き換え

$$2p_{2\nu}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)_t = \left(\frac{\partial}{\partial p_1^\nu}\right)_{p'_1, p_2, p'_2}$$

(および $\partial/\partial p'_1$ について同様なこと) をして, 微分演算子

$$\mathrm{d}_{1\mu} = \frac{p_{1\mu}}{(p_1 k)} k^\nu \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial p_1^\mu} \tag{141.11}$$

(および同様に $\mathrm{d}'_{1\mu}$) を導入する. このとき

$$M_{fi}^{(0)} = Z_1 e\sqrt{4\pi}\, e^*_\mu (\mathrm{d}_1^\mu + \mathrm{d}_1'^\mu) M_{fi}^{(弾)} \tag{141.12}$$

となる[1].

断面積は平方 $|M_{fi}|^2$ によって定義される. 要求される精度で

$$|M_{fi}|^2 = |M_{fi}^{(-1)}|^2 + 2\,\mathrm{Re}(M_{fi}^{(-1)} M_{fi}^{(0)*}) \tag{141.13}$$

となる. 第2項がいま求めている輻射断面積に対する補正である. 光子の偏りについて加え合わせて, この補正に対してつぎのような式を得る.

---

1) この公式の任意個の荷電粒子の衝突への一般化は, $Z_1(\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}'_1)$ を, すべての始めと終りの粒子についての同様の和で置き換えることによって得られる.

$$-4\pi(Z_1e)^2\left(\frac{p'}{(p'k)}-\frac{p}{(pk)}\right)^{\mu}(\mathrm{d}'_1+\mathrm{d}_1)_{\mu}|M_{fi}^{(弾)}|^2. \qquad (141.14)$$

このようにして，輻射断面積に対する補正は，《弾性》過程の断面積とその s についての微係数を使って表わされる．

B. スピン 1/2 のハドロン

ここで荷電ハドロンがスピン1/2をもつとしよう．計算の原理的な面はすべて前と同じである．ただ頂点と伝播関数の具体的な形だけが違っている．

電磁頂点演算子としては(139.7) をとる必要がある．これは $k^2\to 0$ のときに，出ていく光子外線に対しては

$$Z_1e\gamma^{\mu}+\mu_{異常}\sigma^{\mu\nu}k_{\nu} \qquad (141.15)$$

になる．ここで $\mu_{異常}$ はハドロンの磁気モーメントの異常な部分である ((139.8) 参照)．頂点演算子 Γ は《弾性》過程の振幅と結びついており

$$iM_{fi}^{(弾)}=\bar{u}'_1 i\Gamma u_1 \qquad (141.16)$$

により定義される．ここで $u_1=u(p_1)$，$u'_1=u(p'_1)$ は始めと終りのハドロンの双スピノール振幅である．粒子の4－運動量への依存性は

$$\Gamma=f_1(s,t)+(\hat{p}_2+\hat{p}'_2)f_2(s,t) \qquad (141.17)$$

の形に表わされる．ここで f_1，f_2 は不変振幅である ((71.3) 参照)．

このときたとえば，この過程の振幅への図形 (141.2, a) の寄与は

$$M_{fi}^{(a)}=\bar{u}'_1\Gamma\frac{\hat{p}_1-\hat{k}+M}{-2(p_1k)}\sqrt{4\pi}(Z_1e\hat{e}^*+\mu_{異常}\sigma^{\mu\nu}e^*_{\mu}k_{\nu})u_1$$

となる．ここで Γ のなかで引数 s は (141.7) にしたがって置き換えられなければならない．

簡単な計算を省いて，最終的な結果を導こう．

$$\begin{aligned}M_{fi}^{(0)}=&\sqrt{4\pi}Z_1e\bar{u}'_1\left[(\mathrm{d}'_1+\mathrm{d}_1)\Gamma+\frac{\hat{e}^*k}{2(p'_1k)}\Gamma+\Gamma\frac{\hat{k}\hat{e}^*}{2(p_1k)}\right]u_1\\&-\sqrt{4\pi}\mu_{異常}\bar{u}'_1\left[\frac{\sigma^{\mu\nu}e^*_{\mu}k_{\nu}M-\hat{k}(p'_1e^*)+\hat{e}^*(p'_1k)}{(p'_1k)}\Gamma\right.\\&\left.-\Gamma\frac{\sigma^{\mu\nu}e^*_{\mu}k_{\nu}M+\hat{k}(p_1e^*)-\hat{e}^*(p_1k)}{(p_1k)}\right]u_1. \end{aligned} \qquad (141.18)$$

断面積に対する補正のなかには，(141.13) にしたがって $M_{fi}^{(0)}$ が線形で含まれる．このとき磁気モーメント $\mu_{異常}$ は答のなかに，$\mu_{異常}\zeta_1$ あるいは $\mu_{異常}\zeta_2$ の形でのみ含まれ

ることは明らかである．ここで ζ はハドロンの偏りのベクトルである．したがって，ハドロンの偏りについて平均すると，補正のこの部分は落ちてしまう．もしもまた光子の偏りについて平均すると，簡単な変形ののちに，輻射断面積を《弾性》散乱の断面積を使って表わしている公式（141.14）が前と同様に正しいことがわかる（T. N. Burnett, N. M. Kroll, 1968）．

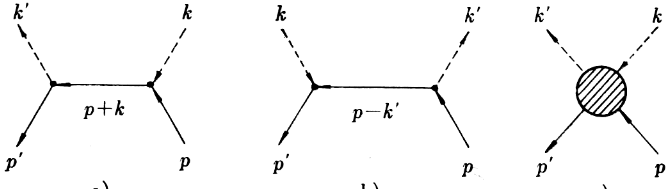
§142. ハドロンによる光子散乱に対する低エネルギー定理

すべての静止荷電粒子による光子散乱の断面積は，振動数の小さい極限では，トムソンの公式で与えられる古典的な値へ近づく．光子の振動数 ω に依存しない振幅がこの極限に対応する．これを $M_{fi}^{(0)}$ と置こう．しかしながら，光子散乱に対しては（前節で考察された制動輻射に対してと同様に），この第1項だけでなく振幅の ω についての展開のつぎの項も，ハドロンの電磁構造の詳細には依存しないことがわかる．すなわち

$$M_{fi} = M_{fi}^{(0)} + M_{fi}^{(1)} \tag{142.1}$$

である，ここで $M^{(1)} \sim \omega$ である（F. E. Low, 1954; M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, 1954）．

考察される過程は，つぎの三つの型の図形で表わされる．



(142.2)

このなかで始めの二つはまた1粒子性中間状態の存在が特徴的であり，したがって極性特異性をもっている．

すべての議論と計算の原理的側面とは §141 におけるのとまったく同じままである．実際には図形（142.2, a, b）の極性部分からの寄与だけを計算すれば十分である．このときこのなかの電磁頂点は（141.15）にしたがって静的形状因子（電荷 Ze および異常磁気モーメント $\mu_{異常}$）を使って表わされる．

しかしながら，制動輻射の場合と違って，今われわれに興味があるコンプトン効果の断面積への補正は，スピンをもつ粒子に対してのみ存在する．それはつぎのような事情によ

る．制動輻射の場合には，スピンと関係した補正のほかに，《弾性》過程の振幅のエネルギー依存性と関係した補正もまた存在する．そしてこの場合には，後者の役割を形状因子が果たし，それは《物理端》に対しては一定でエネルギーに依存しない．したがって，光子散乱に対する補正は，スピンのない粒子には存在しない磁気モーメントが原因となって生じるだけである．以下われわれはスピン 1/2 のハドロンによる光子散乱を考察しよう．

M_{fi} を散乱振幅への極性図形からの寄与と考えると

$$M_{fi} = -4\pi(Ze)^2 e'^*_\mu e_\nu (\bar{u}' \mathrm{Q}^{\mu\nu} u) \tag{142.3}$$

となる ((86.3)，(86.4) 参照)．ここで

$$\mathrm{Q}^{\mu\nu} = (\gamma^\mu + \mathrm{S}'^\mu)\frac{\hat{p}+\hat{k}+M}{s-M^2}(\gamma^\nu - \mathrm{S}^\nu) + (\gamma^\nu - \mathrm{S}^\nu)\frac{\hat{p}-\hat{k}'+M}{u-M^2}(\gamma^\mu + \mathrm{S}'^\mu), \tag{142.4}$$

$$s = (p+k)^2 = (p'+k')^2, \quad u = (p-k')^2 = (p'-k)^2$$

である．簡単のためにつぎの記号を導入する．

$$\mu_{異常}\sigma^{\mu\lambda}k_\lambda = Ze\mathrm{S}^\mu, \quad \mu_{異常}\sigma^{\mu\lambda}k'_\lambda = Ze\mathrm{S}'^\mu. \tag{142.5}$$

演算子 $\hat{p}+M$ を置き換え，方程式 $\bar{u}'(\hat{p}'-M) = (\hat{p}-M)u = 0$ を考慮して，これをつぎの形に変形することができる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}^{\mu\nu} = &\left[(\gamma^\mu + \mathrm{S}'^\mu)\frac{\hat{k}\gamma^\nu + 2p^\nu}{2pk} + \frac{\gamma^\nu\hat{k} - 2p'^\nu}{2p'k}(\gamma^\mu + \mathrm{S}'^\mu)\right] \\ &-\left[\frac{\gamma^\mu\hat{k}' + 2p'^\mu}{2p'k'}\mathrm{S}^\nu + \mathrm{S}^\nu\frac{\gamma^\mu\hat{k}' - 2p^\mu}{2pk'}\right] \\ &-\left[\mathrm{S}'^\mu\frac{\hat{p}+\hat{k}+M}{2pk}\mathrm{S}^\nu - \mathrm{S}^\nu\frac{\hat{p}-\hat{k}'+M}{2pk'}\mathrm{S}'^\mu\right].\end{aligned} \tag{142.6}$$

このような式（および k と k' を置き換えた同様な式）は (142.3) のゲージ不変性を明らかにしている．この条件は等式

$$k'_\mu(\bar{u}'\mathrm{Q}^{\mu\nu}u) = (\bar{u}'\mathrm{Q}^{\mu\nu}u)k_\nu = 0 \tag{142.7}$$

である（証明には，$\hat{k}\hat{k} = 0$，$k\mathrm{S} = k'\mathrm{S}' = 0$ を思い出す必要がある）．

このようにして，散乱振幅の極性部分は，それ自身でゲージ不変であるから，振幅の正則な部分（そのなかには図形 (142.2, c) からの寄与も含んでいる）もそれ自体ゲージ不変でなければならない．以上のことから今後はこの部分の k と k' の冪展開は 2 次の項から始まらなければならないことが導かれる（条件 (124.5) に関連する同様な注意を参照のこと）．言いかえれば，振幅の正則部分は $\omega\omega' \sim \omega^2$ に比例する項から始まる項だけを含

んでいて，われわれに興味のある ω^0 および ω^1 に比例する項には何の寄与もしない．したがって，これらすべては (142.3) に含まれる．

これの実際の計算には始めの電子が静止している実験室系を選ぼう．光子に対しては3次元横波ゲージを選ぶ．そこでは $e_0 = e'_0 = 0$ である．このとき $pe = 0$, $p'e'^* \sim |\boldsymbol{p}'| \sim \omega$ となり，(142.6) からただちに，M_{fi} の展開の第1項は ω^0 に比例すること，および $\mu_{異常}$ を含む項が ω^1 に比例する項だけに寄与することがわかる．

実験室系の電子の始めと終りの波動関数は，必要な精度でつぎの形をもっている．すなわち

$$u = \sqrt{2M}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}' = \sqrt{2M}\left(w'^*, \; -\frac{w'^*}{2M}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\sigma}\right)$$

である．ここで w, w' は3次元スピノールである．

直接の計算はつぎのような結果へと導いている．

$$M_{fi}^{(0)} = -8\pi(Ze)^2(\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e})(w'^*w), \tag{142.8}$$

$$\begin{aligned} M_{fi}^{(1)} = &-16\pi iM\mu_{異常}^2\omega(w'^*\boldsymbol{\sigma}w)[[\boldsymbol{n}'\boldsymbol{e}'^*][\boldsymbol{ne}]] \\ &-4\pi iZe\,\mu_{異常}\,\omega(w'^*\boldsymbol{\sigma}w)\{\boldsymbol{n}([\boldsymbol{ne}]\boldsymbol{e}'^*)+[\boldsymbol{ne}](\boldsymbol{ne}'^*) \\ &-\boldsymbol{n}'([\boldsymbol{n}'\boldsymbol{e}'^*]\boldsymbol{e})-[\boldsymbol{n}'\boldsymbol{e}'^*](\boldsymbol{ne})-2[\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e}]\} \end{aligned} \tag{142.9}$$

(ここで $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\omega$, $\boldsymbol{n}' = \boldsymbol{k}'/\omega'$ である)．

散乱断面積は

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2}|M_{fi}|^2\frac{\omega'^2}{M^2\omega^2}do' \tag{142.10}$$

である ((65.19) 参照)．荷電粒子による散乱に対しては，$M_{fi}^{(0)}$ も $M_{fi}^{(1)}$ も同様に0と異なる．ここで採用した精度では，平方 $|M_{fi}|^2$ のなかに $|M_{fi}^{(0)}|^2$ と $\mathrm{Re}(M_{fi}^{(0)}M_{fi}^{(1)*})$ の項が残される．一番目はトムソン断面積を与える．二番目は光子および電子の偏りについて平均すると0になる．したがって，荷電ハドロンによる散乱のときには，考えられている補正はただ偏りの効果として現われる．

電気的に中性なハドロンによる散乱に対しては $M_{fi}^{(0)} = 0$ であり，断面積は平方 $|M_{fi}^{(1)}|^2$ によって決定される．終りの粒子の偏りについて平均し，始めの粒子の偏りについての和をとったあとでは，これは（普通の単位で）

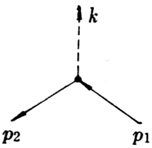
$$d\sigma = \frac{2\mu^4\omega^2}{\hbar^2c^4}(2+\sin^2\vartheta)do' \tag{142.11}$$

に等しくなる．ここで ϑ は光子の散乱角である．また異常磁気モーメントは全磁気モー

メント μ に等しい．この断面積は，その角度依存性については，反対称散乱に対応している（§61，問題2参照）．

§143. ハドロンの多重極モーメント

今度は（139.2）と同じ図形



(143.1)

に対応する遷移カレントを考察しよう．しかしながら，ここでは線 p_1，p_2 は異なる粒子（質量 M_1 および M_2）に対応する．光子線 $k = p_1 - p_2$ はここでは頂点から出てゆくように表わすと便利である．このとき光子は仮想的であっても現実的であってもよい．ただ $k^2 < (M_1 - M_2)^2$ であればよい．したがって，$k^2 = 0$ も許される．このようにして，考えられている図形の適用は，特に，粒子の転換の際の光子放出の過程を含み，そのなかには原子核の転換も含まれる（最後の場合は，始めと終りの粒子は異なる状態にある原子核である）．

設定された問題に関連して，光子の波長が粒子の特性の《長さ》（すなわち，その形状因子に含まれる長さである．ゆえに原子核に対しては，もちろん，その《半径》と一致する）にくらべて大きいときが最も重要である．このとき遷移カレントは k の冪で展開される[1]．

まず第一に

$$J_{fi} = 0 \quad (k = 0 \text{ のとき}) \tag{143.2}$$

でなければならないことを指摘しよう．実際に，空間および時間に対して一定であるポテンシャルは $k \to 0$ の極限に対応する．しかしこのようなポテンシャルは物理的価値がなく，いかなる現実の過程の原因ともなりえない．この結果には，もっと形式的な観点から到達することができる．すなわち，§139 で考察されたカレントは，4-ベクトル $P = p_1 + p_2$ に比例する項のために，$k = 0$ のとき 0 と異なっている．ゆえに $M_1 \neq M_2$ のとき積 $Pk \neq 0$ である．したがって，このような項はカレントの横波条件から禁止される．

---

1) 以下われわれは，ヴェ・ベ・ベレステツキー（1948）の方法にしたがう．

カレント $J_{fi}=(\rho_{fi},\boldsymbol{J}_{fi})$ の横波条件を3次元の形に書こう．

$$\boldsymbol{k}\boldsymbol{J}_{fi}=\omega\rho_{fi} \tag{143.3}$$

である．二つの方法でこの条件を満足させることができる．すなわち

$$\boldsymbol{J}_{fi}=\omega\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\omega),\quad \rho_{fi}=\boldsymbol{k}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{143.4}$$

あるいは

$$\boldsymbol{J}_{fi}=[\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{k},\omega)],\quad \rho_{fi}=0 \tag{143.5}$$

である．ここで $\boldsymbol{v}$ はある極性の，また $\boldsymbol{a}$ は軸性のベクトルである．第一の場合には電気型の，第二の場合には磁気型のカレントになる．(143.2) にしたがって，$\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{k},\omega\to 0$ のときに有限になるか，あるいは0になる．

光子のエネルギーを $\omega\ll M_1$ としよう．このとき反跳の効果を無視し，(粒子 M_1 の静止した系で) 終りの粒子 M_2 もまた静止していると考えることができる．このとき ω は与えられた量である．すなわち $\omega=M_1-M_2$ である．静止粒子 M_1 および M_2 の状態は，階数が $2s_1$ および $2s_2$ の3次元スピノール w_1 および w_2 によって表わされる．ここで s_1 および s_2 は粒子のスピンである．遷移カレントは w_1 および w_2^* の双1次結合でなければならない．これらのスピノールの成分の積から，$l=s_1+s_2,\cdots,|s_1-s_2|$ の階数の既約テンソルをつくることができる (l が与えられたとき，粒子 M_1 および M_2 の内部偶奇性によって，真正テンソルあるいは擬テンソルになる)．これらのテンソルの他にわれわれの手もとにはベクトル $\boldsymbol{k}$ だけが存在する．カレントの $\boldsymbol{k}$ での冪展開の第1項をつくるために，これらの量を使って $\boldsymbol{k}$ についてできるだけ低い階数のベクトルをつくる必要がある．われわれは，最小の階数のテンソルをとり，それにベクトル $\boldsymbol{k}$ で $l-1$ 回のスカラー積をつくり，この目的を遂げることができる．これは極性ベクトル $\boldsymbol{v}$，あるいは軸性ベクトル $\boldsymbol{a}$ になる．

Q_{lm} を粒子の波動振幅からつくられたテンソルの球面成分としよう．$\boldsymbol{k}$ の成分からつくられた $l-1$ 階のテンソルの球面成分は $|\boldsymbol{k}|^{l-1}Y_{l-1,m}(\boldsymbol{n})$ に等しい (ここで $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/\omega$ である)．球面テンソルの一般の合成則 (III, (107.3) 参照) にしたがって，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の球面成分は

$$v_\lambda=(-1)^{\lambda+1}i^l\frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!}\sqrt{\frac{2l+1}{l}}|\boldsymbol{k}|^{l-1}\times\sum_m\begin{pmatrix}l-1 & 1 & l\\ \lambda+m & -\lambda & -m\end{pmatrix}Q_{l,-m}Y_{l-1,\lambda+m}(\boldsymbol{n})$$

の形に書くことができる．ここで λ は 0, ±1 の値をとる (共通因子の選び方について

は下記参照）．公式 (7.16) を使って，$\boldsymbol{v}$ を球ベクトルの形に表わすことができる．すなわち

$$\boldsymbol{v} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,|\boldsymbol{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q_{l,-m} \times [\sqrt{l+1}\,\boldsymbol{Y}^{(電)}_{lm}(\boldsymbol{n}) + \sqrt{l}\,\boldsymbol{Y}^{(縦)}_{lm}(\boldsymbol{n})] \tag{143.6}$$

である．(143.4) に代入して El－遷移カレントが得られる．すなわち

$$\boldsymbol{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,\omega\,|\boldsymbol{k}|^{l-1}}{(2l-1)!!\sqrt{l(2l+1)}} \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(電)}_{l,-m} \times [\sqrt{l+1}\,\boldsymbol{Y}^{(電)}_{lm}(\boldsymbol{n}) + \sqrt{l}\,\boldsymbol{Y}^{(縦)}_{lm}(\boldsymbol{n})], \tag{143.7}$$

$$\rho_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}\,|\boldsymbol{k}|^{l}}{(2l-1)!!\sqrt{2l+1}} \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(電)}_{l,-m} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) \tag{143.8}$$

である（われわれはいたるところで $|\boldsymbol{k}|$ と ω を区別している．これは現実の光子と同様に仮想的光子にも使えるようにするためで，後者に対してはこれらの量は一致しない）．

(143.7)，(143.8) では，球面テンソル Q_{lm}（ここでは $Q^{(電)}_{lm}$ と置かれている）が真正テンソルであると暗に了解されている．もしもこれが擬テンソルであれば（このような場合にはこれを $Q^{(磁)}_{lm}$ と置く），公式 (143.6) は擬ベクトル $\boldsymbol{a}$ を定義する．(143.5) に代入すると，このときは Ml－遷移カレントを与える．すなわち，

$$\boldsymbol{J}_{fi} = i^l \frac{\sqrt{4\pi}}{(2l-1)!!} \sqrt{\frac{l+1}{l(2l+1)}}\,|\boldsymbol{k}|^l \sum_m (-1)^{l-m} Q^{(磁)}_{l,-m} \boldsymbol{Y}^{(磁)}_{lm}(\boldsymbol{n}), \tag{143.9}$$
$$\rho_{fi} = 0$$

となる．

$Q^{(電)}_{lm}$ および $Q^{(磁)}_{lm}$ という量はハドロンの電気的および磁気的多重極遷移モーメントを表わしている．ハドロンの電気力学におけるこれらの役割は，電子の電気力学における対応する量の役割と同様である．しかしながら，このとき電子系に対してこれらのモーメントは波動関数を使って（対応する演算子の行列要素として）原理的には計算できるが，ハドロンの電気力学では，これらは現象論的な量として現われ，その値は実験から見いだされる．

(143.7)～(143.9)のなかのこれらの量の規格化は，§46 におけるその定義に対応するように選ばれる．カレント (143.7)～(143.9) を座標表示の遷移カレントのフーリエ成分とみなして，これを確かめることができる．そこで，(46.3) を使って積分

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} d^3x \tag{143.10}$$

のなかの因子 e^{-ikr} を展開して

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = 4\pi_f i \sum_{l,m} Y_{lm}(\boldsymbol{n}) \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) Y^*_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) g_l(|\boldsymbol{k}|r) d^3x$$

を得る．ここで，積分が0にならない最小の l をもつ項を残し，$|\boldsymbol{k}|r \ll 1$ のときに関数 $g_l(|\boldsymbol{k}|r)$ をその展開 (46.5) の第1項で置き換えると，公式 (143.9) にもどる．このとき

$$Q^{(\text{電})}_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int r^l \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) Y_{lm}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) d^3x \tag{143.11}$$

であり，定義 (46.7) と一致する．

現実の光子放出に使うときには，ここで得られた式はわれわれにとって既知の結果になることも示そう．

運動量 $\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{n}$ と偏り $e = (0, \boldsymbol{e})$ をもつ光子放出の遷移振幅は

$$M_{fi} = -e\sqrt{4\pi}\, \boldsymbol{e}^* \boldsymbol{J}_{fi} \tag{143.12}$$

である．もしも始めと終りの状態で，原子核の角運動量の投影が一定値 (M_i および M_f) をもつならば，(143.7)～(143.9) の m についての和のなかで，ただ1項，すなわち $m = M_i - M_f$ だけが残る．(16.23) にしたがって積 $\boldsymbol{Y}^{(\text{電})}_{lm} \boldsymbol{e}^{(\lambda)*}$ あるいは $\boldsymbol{Y}^{(\text{磁})}_{lm} \boldsymbol{e}^{(\lambda)*}$(ここで $\lambda = \pm 1$ は光子の螺線度で，$\boldsymbol{e}^{(\lambda)} \perp \boldsymbol{n}$ である) は $D^l_{\lambda m}$ に比例するので，われわれは§48で考察された公式にもどることになる．

輻射の微分確率は

$$dw = 2\pi\delta[\omega - (E_i - E_f)] |M_{fi}|^2 \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \tag{143.13}$$

になる[1] (E_i, E_f は原子核の始めと終りのエネルギーである)．偏りについて加え，d^3k について積分して全確率が得られる．(143.7) あるいは (143.9) を (143.12) に，つづいて (143.13) に代入し 指定通りの操作をすると，われわれは (46.9) (あるいは(47.2)) にもどる．

公式 (143.7)～(143.9) は，現実の光子の放出に対して起こりうるすべての場合を含んでいる．仮想的光子に対してはこれらの公式には包括しきれない他の場合がまだ可能である (R. H. Fowler, 1930)．

もしも原子核の始めと終りの状態のスピンと偶奇性が同じであるならば，それらの波動

1) (65.11) における $(2\pi)^4\delta^{(4)}$ の代りの，この公式における因子 $2\pi\delta$ は，原子核の反跳を無視すると運動量は保存しないで，エネルギーだけが保存することと関連している．

振幅からスカラー Q_0 をつくることができ，それを使ってつぎの形の遷移カレントをつくることができる．

$$\rho_{fi} = Q_0 k^2, \quad \boldsymbol{J}_{fi} = Q_0 \omega \boldsymbol{k}. \tag{143.14}$$

量 Q_0 を遷移の単極 $(E0)$ モーメントと呼ぶ．現実の光子の放出に対しては，対応する遷移振幅は0になる（$\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{k} = 0$ であるから）．しかしながら，単極カレントは仮想的光子放出と結びついた遷移の源にはなることができる．それだけでなく $s_1 = s_2 = 0$ のときにはこのようなものの唯一の源である．このときには他の多重極モーメントはすべて0に等しくなる．

その ω および $\boldsymbol{k}$ への依存性に関して，単極カレント (143.14) は電気的4重極カレントと似ている．したがってモーメント Q_0 は4重極モーメントと同じ程度の大きさである．(143.14)を座標表示のカレントのフーリエ成分として議論することによってもまた，この結論に到達することができる．(143.10) の因子を展開して

$$e^{-i\boldsymbol{kr}} = 1 - i\boldsymbol{kr} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{kr})^2 + \cdots.$$

始めの2項からの積分は0になるとして

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{2}\int \rho_{fi}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{kr})^2\, d^3x,$$

あるいは，関数 $\rho(\boldsymbol{r})$ が球対称と仮定して

$$\rho_{fi}(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{6}\boldsymbol{k}^2 \int \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) r^2\, d^3x$$

を得る．(143.14) とくらべて

$$Q_0 = -\frac{1}{6}\int \rho_{fi}(\boldsymbol{r}) r^2\, d^3x \tag{143.15}$$

を得る．この量と4重極モーメントとの類似性は明らかである．

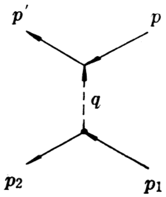
問　題

1.　原子核の Ml－遷移の際の励起エネルギー ω による，K－殻からの原子のイオン化（γ 線の内部転換と呼ばれている）の確率を求めよ．ただし原子内電子の結合エネルギー，および核の電場の電子の波動関数への影響は無視するものとする[1]．

---

1)　この近似は，原子核の電荷が小さく，励起エネルギーが十分に大きいことを要求する（と同時に $1/\omega$ は原子核の半径にくらべて大きいことが仮定されている）．実際にはこの近似はあまり良くない．そしてより正確な計算は原子核のクーロン場を考慮することを要求している．

解 この過程はつぎの図形で記述される．



(1)

ここで p_1 および p_2 は異なる状態にある静止した原子核に関するものである．また $p=(m, 0)$ および $p'=(m+\omega, \boldsymbol{p}')$ は電子の始めと終りの 4－運動量である．この図形には振幅

$$M_{fi} = e^2 \frac{4\pi}{q^2} \bar{u}(p') \hat{J}_{fi} u(p)$$

が対応する．ここで J_{fi} は原子核の遷移カレントである．電子の終りの偏りについて加え，始めの偏りについて平均したあとで

$$\frac{1}{2}\sum_{偏り} |M_{fi}|^2 = e^4 \frac{16\pi^2}{(q^2)^2} \{q^2(J_{fi}J_{fi}^*) + 4(J_{fi}\,p)(J_{fi}^*\,p)\}$$

となる（$J_{fi}\,q=0$，したがって $J_{fi}\,p = J_{fi}\,p'$ であることが使われた）．転換の確率は

$$dw_{転換} = 2|\psi_i(0)|^2 \left(\frac{|\boldsymbol{p}|}{m} d\sigma\right)_{\boldsymbol{p}\to 0}$$

のように計算される．ここで $d\sigma$ は $p=(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ とした図形 (1) によって描かれた散乱の断面積 $d\sigma$ である．また ψ_i は原子内電子の波動関数である（K－電子に対しては $|\psi_i(0)|^2 = (Z\alpha m)^3/\pi$ である）．因子 2 は原子の K 殻内の二つの電子を勘定に入れてある．断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = 2\pi\delta(\varepsilon+\omega-\varepsilon')|M_{fi}|^2 \frac{d^3p'}{2|\boldsymbol{p}|2\varepsilon'(2\pi)^3}$$

で計算される（219 頁の脚注参照）．

Ml－遷移に対してはカレント J_{fi} は (143.9) からもってくる必要がある．$dw_{転換}$ を $d\varepsilon'$ について積分すると δ－関数が消えて，do' についての積分は平方 $|\boldsymbol{Y}_{lm}^{(磁)}|^2$ を 1 に変える．その結果，転換の確率は平方 $|Q_{l,-m}^{(磁)}|^2$ を使って表わされる．同じ原子核の遷移の際の光子の自発輻射確率 w_γ も，(46.9) にしたがって上と同じ量を使って表わされる．最終的に

$$\frac{w_{転換}}{w_{\gamma}} = 2\alpha(Z\alpha)^3 \frac{m}{\omega}\left(1+\frac{2m}{\omega}\right)^{l+1/2}$$

が得られる（この比を転換係数と呼ぶ）.

2.　原子核の El − 遷移に対して同じことを行なえ.

解　(143.7), (143.8) からの遷移カレントで，まったく同じ方法を使って

$$\frac{w_{転換}}{w_{\gamma}} = 2\alpha(Z\alpha)^3 \left(1+\frac{l}{l+1}\frac{m^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{2m}{\omega}\right)^{l-1/2}$$

が得られる.

3.　原子核の単極遷移に対して同じことを行なえ.

解　(143.14) からのカレントを使って

$$w_{転換} = 16\alpha^2(Z\alpha)^3 m^3\omega^2\left(1+\frac{2m}{\omega}\right)^{3/2}|Q_0|^2$$

が得られる．光子の単極輻射が不可能なので，これから $|Q_0|^2$ を消去することはできない.

§144.　ハドロンの電磁形状因子のアイソスピンの性質

§139で導入された電磁頂点演算子 $\Gamma(q)$ (4−ベクトル) は，4−運動量およびスピン変数の関数に作用する．もしも粒子のアイソスピンの性質もまた考慮に入れられるならば，頂点演算子はそのアイソスピン変数にも作用するであろう．このとき《3端子図形》(139.2) の二つのハドロン端は必ずしも同一の粒子に対応するものではない．すなわち，それは一つのアイソ多重項の任意の二つの項であってもよい．ハドロンの種類の変化を伴わない頂点演算子は，アイソスピン変数について対角型の行列要素 $\langle h|\Gamma|h\rangle$ になるだろう（ここで h はハドロンの種類を表わしている）.

電磁相互作用は強い相互作用がもっているアイソ不変性を壊す．これは，電磁頂点演算子 Γ はアイソスカラーでないことを意味している．これのアイソスピンについての性質はつぎのようにして求めることができる.

$q=0$ のときに，行列要素 $\langle h|\Gamma(q)|h\rangle$ は，われわれが§139で見てきたように，ハドロンの電荷 Z になってしまう．$Z=Y/2+T_3$ である．すなわち，アイソスカラーとアイソベクトルの第3成分の固有値とから合成される．演算子 Γ のアイソテンソルの性質は q には依存しないと考えるのが自然である．そうすると

$$\Gamma(q) = \Gamma_s(q) + \Gamma_3(q) \tag{144.1}$$

となる．ここで Γ_s はアイソスカラー演算子で，Γ_3 はアイソベクトル演算子の第3成分である．

(144.1) から，任意の q に対して

$$\langle h|\Gamma(q)|h\rangle = c_1(q) + c_2(q)T_3 \tag{144.2}$$

が導かれる．ここで $c_1(q)$ および $c_2(q)$ はアイソ多重項のすべての項に対して同一の (4-ベクトル) 関数である．電磁形状因子はこのような構造をもつはずであり，ハドロンの種類の変化を伴わない頂点演算子は (§139 にしたがって) これを使って表わされる．アイソ多重項が2個以上の成分を含むとき，すなわち $T > 1/2$ のときには，公式 (144.2) は現実の関係式を与える (すなわち c_1 と c_2 を消去することができる)．たとえば Σ-ハイペロンの3重項に対しては

$$\langle\Sigma^+|\Gamma|\Sigma^+\rangle + \langle\Sigma^-|\Gamma|\Sigma^-\rangle = 2\langle\Sigma^0|\Gamma|\Sigma^0\rangle$$

を得る．特に，これらの粒子の磁気モーメントのあいだの関係式もこのようなものでなければならない．すなわち

$$\mu(\Sigma^+) + \mu(\Sigma^-) = 2\mu(\Sigma^0) \tag{144.3}$$

である (R. E. Marshak, S. Okubo, E. Sudarshan, 1958)．

強い相互作用にもっと広いユニタリー対称性 $SU(3)$ を仮定すると，演算子 Γ には，また一定の超スピノールの性質を与える必要がある．

このためには，対角行列 λ_1^1 はクォークの電荷演算子であることを思い起こそう ((136.14) および定義 (138.5) 参照)．行列 $-\bar{\lambda}_1^1$ は下の添字に作用し，反クォークの電荷演算子である．したがって，任意の超多重項の電荷演算子は $Z = \Lambda_1^1 - \bar{\Lambda}_1^1$ である (Λ は (138.4) に定義されている)．(144.1) を導くときに行なわれたのとまったく同様にして，$q \neq 0$ の一般の場合には，演算子 Γ の超スピノール構造は

$$\Gamma = c_1\Lambda_1^1 + c_2\bar{\Lambda}_1^1 \tag{144.4}$$

になるはずである (N. Cabibbo, R. Gatto, S. Coleman, S. L. Glashow, 1961)．

問　題

バリオン超8重項の成分の磁気モーメントのあいだの関係式を見いだせ．

解　行列要素の一般形は $\langle h|\Gamma|h\rangle$ である．したがって磁気モーメント $\mu(h)$ は

$$\mu(h) = c_1\bar{\varphi}_b^c(\lambda_1^1)_a^b\varphi_c^a + c_2\bar{\varphi}_c^b(\lambda_1^1)_b^a\varphi_a^c$$

である ((138.6) 参照)．バリオン8重項のいろいろの成分に対してこの量を計算し (アイ

ソ不変性の結果，すでにできている等式 (144.3) のほかに) つぎのような関係式が得られる．

$$\mu(n)=\mu(\Xi^0)=2\mu(\Lambda)=-2\mu(\Sigma^0),$$

$$\mu(p)=\mu(\Sigma^+),\quad \mu(\Sigma^-)=\mu(\Xi^-).$$

第16章　弱い相互作用

§145.　レプトンの弱い相互作用

強い相互作用ができない粒子の一群は**レプトン**[1]を構成している．電子 e^-，ミューオン μ^-，二つの型のニュートリノ，すなわち電子ニュートリノ ν_e およびミューオンニュートリノ ν_μ と呼ばれるもの，それにこれらの反粒子，すなわち e^+，μ^+，$\bar{\nu}_e$，$\bar{\nu}_\mu$ がこれに属する．すべてのレプトンは1/2のスピンをもつ．ニュートリノと反ニュートリノはその螺線度の符号で区別される．螺線度 $\lambda=-1/2$ をもつ粒子をニュートリノと，また $\lambda=+1/2$ をもつ粒子を反ニュートリノと呼ぶことを思い起こそう（§30参照）．

ミューオンの質量は

$$m_\mu = 105.66\ \mathrm{MeV}$$

である．ミューオンは不安定な粒子である．それは

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \tag{145.1}$$

にしたがって崩壊し，その寿命は $2.20\cdot 10^{-6}$ sec である．

レプトンは（電磁相互作用の外は）弱い相互作用をするだけである．このとき二つの独特な保存則が守られる．現存のデータは，レプトンに一定の電子レプトン数（L_e）とミューオンレプトン数（L_μ）をつけることによって，これらの保存則にまとめられる．すなわちレプトン数は

$$\begin{array}{ccccc} & e^- & \nu_e & e^+ & \bar{\nu}_e \\ L_e = & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & \mu^- & \nu_\mu & \mu^+ & \bar{\nu}_\mu \\ L_\mu = & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \tag{145.2}$$

である．これらの数の保存則は，言いかえれば，反応の際に和

$$N_{e^-} + N_{\nu_e} - N_{e^+} - N_{\bar{\nu}_e} \qquad \text{および} \qquad N_{\mu^-} + N_{\nu_\mu} - N_{\mu^+} - N_{\bar{\nu}_\mu}$$

が個々に保存されることを意味している．ここで N は対応する粒子数である．

同時に，弱い相互作用は，電磁および強い相互作用で守られていた保存則のいくつかを

1）ギリシア語の“レプトス”からきている．これは《小さい》,《軽い》を意味する．

破ってしまう．すなわち，空間および荷電偶奇性は保存されない[1]．ハドロンが加わる反応ではまた，アイソスピンおよびハイパーチャージの保存も破られる．

弱い相互作用の首尾一貫した物理理論は現在のところ存在しない．それどころか，このような理論自体を，強い相互作用からはなれて定式化することが一般に可能かどうかさえわかっていない．現存の理論は本質的に現象論的性質をもっている．それは，対称性や相対論的不変性の種々の考察に，そしてまたいくつかの特別な仮定に基礎を置いている．見かけ上のもっともらしさにもかかわらず，これらの仮定は論理的にすっきりした体系を構成していない．またその信頼性は実験による直接の検証だけに基づいており，その実験も現時点ではまだ非常に不十分である．

はじめに，レプトンだけが参加する《弱い反応》(弱い相互作用が原因となる反応) を考察しよう．ミューオンの崩壊 (145.1) はこのような反応の最も重要な例である．

相対論的不変性の要求だけからつくられた，この過程の振幅の最も一般的な形は

$$M_{fi}=\sum_{n=1}^{4}f_nI_n \tag{145.3}$$

である．ここで f_n は不変振幅 (粒子の 4－運動量の関数，§71 参照) で，I_n は反応に加わる4個の粒子の波動振幅からつくられる不変《4重1次》結合である．この和の項の数，すなわち独立な不変振幅の数は4に等しい．これは (ニュートリノの螺線度は与えられた量であることを考慮して) 粒子の螺線度の値の可能な組の数の計算から明らかである．

和 (145.3) の各項の不変性というとき，われわれはローレンツ変換に関する不変性を考えていて，空間反転に関するものでないことを強調しておこう．以下われわれはこのような意味で 4－ベクトルということにする．反転に対する振舞いの問題はここでは意味を失っている．たとえば螺線度の符号を変えると，反転はニュートリノを自然界に存在しない粒子へと転換してしまうからである．

事柄をはっきりさせるために μ^- の崩壊について述べよう．反応振幅をつくるときに，(4－運動量 p をもつ) 終状態にある反粒子は (4－運動量 $-p$ をもつ) 始状態の粒子として現われることを思い起こそう．

スピノール表示では，粒子の波動振幅は

$$u_e=\begin{pmatrix}\xi_e\\ \eta_e\end{pmatrix},\quad u_\mu=\begin{pmatrix}\xi_\mu\\ \eta_\mu\end{pmatrix},\quad u_\nu=\begin{pmatrix}0\\ \eta_\nu\end{pmatrix} \tag{145.4}$$

1) 弱い相互作用での空間偶奇性非保存の可能性についてはリーとヤンが最初に述べた (1956)．

である．ここで ξ および η はそれぞれ点のないスピノールおよび点のあるスピノールである．u_{ν_e} および $u^*_{\nu_\mu}$ の成分から四つの双1次の量

$$\zeta^{(\nu_e\nu_\mu)}_{\dot{r}s} = \eta_{\nu_e\dot{r}}\eta^*_{\nu_\mu\dot{s}}$$

をつくることができる $(r, s = 1, 2)$．これは4－ベクトルの成分と同値である（§18参照．η^* は点のないスピノールであることを思い起こそう）．同様に u_μ および u^*_e の成分から二つの4－ベクトルをつくることができる．すなわち

$$\zeta^{(e\mu)}_{\dot{r}s} = \eta_{\mu\dot{r}}\eta^*_{e\dot{s}}, \quad \kappa^{(e\mu)}_{\dot{r}s} = \xi^*_{\mu r}\xi_{es}$$

である．これらの量を使って，二つの不変量がつくられる．すなわち

$$I_1 = \zeta^{(\nu_e\nu_\mu)}_{\dot{r}s}\zeta^{(e\mu)\dot{r}s}, \quad I_2 = \zeta^{(\nu_e\nu_\mu)}_{\dot{r}s}\kappa^{(e\mu)\dot{r}s}$$

である．さらに二つの不変量をつくるためには，波動振幅（145.4）とならんで，他の量，すなわち反応を特徴づける4－運動量のなかのいずれかをもってくる必要がある．

現存のミューオン崩壊に関する実験データを議論するためには，（145.3）に含まれる四つの不変量のなかで実際にはただ一つだけが0と異なると仮定すれば十分であることがわかる．その一つは，相互作用をする粒子の波動関数の同じ成分 (η) だけを含んでいる不変量 I_1 に対応している．この不変量は，波動関数の表示の選択によらない対称な形で，つぎのように書かれる[1]．

$$I_1 = \frac{1}{2}(\bar{u}_e \mathrm{O}_\alpha u_\mu)(\bar{u}_{\nu_\mu}\mathrm{O}^\alpha u_{\nu_e}).$$

ここで

$$\mathrm{O}^\alpha = \gamma^\alpha(1+\gamma^5) = (1-\gamma^5)\gamma^\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\alpha(1+\gamma^\alpha) \qquad (145.5)$$

である．行列 O^α のなかの因子 $(1\pm\gamma^5)$ は，積 $(\bar{u}\mathrm{O}u)$ のなかから双スピノールの ξ－成分を消去する（§30参照）．対応する不変振幅を $-G/\sqrt{2}$ と置いて，ミューオン崩壊の反応振幅を

$$M_{fi} = -\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{u}_e \mathrm{O}_\alpha u_\mu)(\bar{u}_{\nu_\mu}\mathrm{O}^\alpha u_{\nu_e}) \qquad (145.6)$$

あるいは，同等な形で

1) この章でわれわれは4次元テンソル添字を，ギリシア語のアルファベットのはじめの $\alpha, \beta, \cdots$ を使う．これは粒子の記号に対して使われる習慣になっている添字 μ, ν との混同を避けるためである．

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{u}_e \mathrm{O}_\alpha u_{\nu_e})(\bar{u}_{\nu_\mu} \mathrm{O}^\alpha u_\mu) \tag{145.7}$$

のように書く（§28，問題2参照）.

G という量は粒子の 4－運動量のある（不変）関数になるはずである．しかしミューオン崩壊についての現存の実験データによればこの可能な依存性を無視し，G を定数値，すなわち相互作用定数と考えてもよい．

G が定数なので，振幅（145.7）をハミルトニアン

$$-\frac{G}{\sqrt{2}} \int (\bar{\phi}_e \mathrm{O}_\alpha \phi_{\nu_e})(\bar{\phi}_{\nu_\mu} \mathrm{O}^\alpha \phi_\mu)\, d^3x \tag{145.8}$$

について1次まで計算された S－行列の要素として表わすことができる．このハミルトニアンは相互作用ハミルトニアンのなかの与えられた過程をひき起こす部分とみなすことができる．全ハミルトニアンのなかでこの部分はエルミート共役な式とともに出てくる．エルミート共役とは

$$(\bar{\phi}_{\nu_e} \mathrm{O}^\alpha \phi_e)^+ = (\bar{\phi}_e \bar{\mathrm{O}}^\alpha \phi_{\nu_e}), \quad \bar{\mathrm{O}}^\alpha = \gamma^0 \mathrm{O}^{\alpha +} \gamma^0 \tag{145.9}$$

である．$\gamma^{5+} = \gamma^5$ および $\gamma^{\alpha +} = \gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^0$ であることに気付けば $\bar{\mathrm{O}}^\alpha = \mathrm{O}^\alpha$ である．したがって（145.8）にエルミート共役な式は

$$-\frac{G^*}{\sqrt{2}} \int (\bar{\phi}_{\nu_e} \mathrm{O}_\alpha \phi_e)(\bar{\phi}_\mu \mathrm{O}^\alpha \phi_{\nu_\mu})\, d^3x \tag{145.10}$$

の形になる．もしも演算子（145.8）が μ^- の崩壊をひき起こすとすれば，演算子（145.10）は μ^+ の崩壊をひき起こす.

一般性を制限することなしに，定数 G は実数と考えてよい．実際に，すべての複素場の ϕ－演算子は位相因子を除いて決定されるだけである（(12.10) 参照）．したがって，ϕ－演算子のどれかの適当な変換により G のなかの任意の位相因子を消去することができる.

自然な一般化のつぎの一歩は，レプトンの弱い相互作用のハミルトニアンにつぎのような形を要求することである．すなわち

$$\mathrm{H}_w = -\frac{G}{\sqrt{2}} \int (\mathrm{j}_w^+ \mathrm{j}_w)\, d^3x \tag{145.11}$$

である．ここで 4－ベクトル j_w は**弱いカレントの演算子**で次式によって定義される[1].

1）弱い相互作用を，ϕ－演算子についての双1次のカレントの積の形に書くことは，1934年に最初にフェルミによって β－崩壊の理論のなかで提案された．(131.12) の形のカレントに基づく理論の変種は，ゲルマンとファインマン（1958）およびマルシャックとスダルシャン（1958）により提出された.

$$\mathrm{j}_w^\alpha = \bar{\phi}_e \mathrm{O}^\alpha \phi_{\nu_e} + \bar{\phi}_\mu \mathrm{O}^\alpha \phi_{\nu_\mu},$$
$$\mathrm{j}_w^{\alpha+} = \bar{\phi}_{\nu_e} \mathrm{O}^\alpha \phi_e + \bar{\phi}_{\nu_\mu} \mathrm{O}^\alpha \phi_\mu. \qquad (145.12)$$

演算子 j_w は系の電荷を1だけ小さくする（e^- あるいは μ^- の生成，あるいは，e^+ あるいは μ^+ の消滅）．また j_w^+ は1だけ大きくする．ゆえに $\mathrm{j}_w^+\mathrm{j}_w$ は電荷を不変のままにしておく．もちろん，演算子（145.12）のつくり方は二つのレプトン数の保存もまた考慮してある．(145.11) のなかには(145.8)，(145.10) の項のほかに，電子によるニュートリノ散乱のような新しい過程をもたらす項もまた含まれている．

カレント（145.12）の粒子対 $e\nu_e$ および $\mu\nu_\mu$ に関する対称性に注目しよう．これは，電子あるいはミューオンの参加する弱い過程の性質の差は，その質量の差だけに結びついていることを意味している．このような立場は，電子とミューオンの電磁相互作用に関しても成り立つことを思い起こそう．

カレント密度の次元は（普通の単位で），$[\mathrm{j}] = \mathrm{cm}^{-3}$ である．したがって相互作用定数の次元は $[G] = \mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^3$ である．相対論的単位では，G が質量の逆2乗の次元をもつことを意味している．この単位でこの値は

$$G = 1.0\cdot 10^{-5} m_p^{-2} \qquad (145.13)$$

である．ここで m_p は核子の質量である．普通の単位では

$$G = 1.0\cdot 10^{-5} \frac{\hbar^3}{m_p^2 c} = 1.43\cdot 10^{-49}\,\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^3 \qquad (145.14)$$

である．次元のない数 10^{-5} は相互作用の小ささの程度を特徴づけている．

（仮定された定数 G を一緒にした）ハミルトニアン（145.11）の特徴的な性質は，その《局所性》である．すなわち，四つの ϕ－演算子はすべて同一の 4－座標 x の値をとる．すべての粒子が同一の点で生成消滅されるということができる．言いかえれば，上記の仮定は，弱い相互作用の《作用半径》が0に等しいことを意味している．

ハミルトニアン（145.11）を導入する意味は，これを使って表わした摂動論の1次近似の反応振幅のつくり方の枠を出ているものではないことを強調しておく必要がある．さらに高次の近似でこの演算子を適用すると，避けることができない発散が現われてくる．この意味で (145.11) は単なる現象論的な有効ハミルトニアンということになる．

弱い相互作用の偶奇性の非保存は，ハミルトニアン（145.11）が空間反転に対して不変でないことに対応する．この不変でない性質について，われわれはすでに反応振幅をつくる際に指摘してある．それは行列 O^α を使ったカレントの書き方からすでに明らかである．

すなわち，$\bar{\psi}_a \gamma^\alpha (1+\gamma^5)\psi_b$ の形の式は二つの 4－ベクトルの和である．このとき一つは真正ベクトル (V) で他は擬ベクトル (A) である．したがって二つは反転のときに異なった方法で変換される[1]．

ハミルトニアン (145.11) はまた荷電共役に関しても不変ではない．しかしながら，二つの変換の同時適用（**結合反転**）に関しては不変である．普遍的な CPT－不変性のために，CP－反転は時間反転と同等である．

演算子 4－ベクトル

$$V^\alpha = \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \psi_b, \quad A^\alpha = \bar{\psi}_a \gamma^\alpha \gamma^5 \psi_b$$

の，荷電共役の際および反転の際の変換則は §28 で確立されている．(28.4) と (28.7) を結合して，演算子 CP がこれらの 4－ベクトルを同じように変換することがわかる．すなわち

$$\mathrm{CP}: (V^0_{ab}, \mathbf{V}_{ab}) \to (-V^0_{ba}, \mathbf{V}_{ba}), \quad (A^0_{ab}, \mathbf{A}_{ab}) \to (-A^0_{ba}, \mathbf{A}_{ba})$$

である．カレント演算子に対して，これは置き換え

$$\mathrm{CP}: (j^0_w, \mathbf{j}_w) \to (-j^{0+}_w, \mathbf{j}^+_w) \tag{145.15}$$

を意味している．カレントの積は $j^+_w j_w \to j_w j^+_w = j^+_w j_w$ である（j_w と j^+_w の交換は異なる ψ－演算子の偶数回の転置が起こり，したがって符号の変化を必要としない）．

このようにして，ハミルトニアン (145.11) で記述される弱い相互作用は，結合偶奇性を保存する[2]．

§146. ミューオン崩壊

(65.11) にしたがって，（ミューオンの静止系で）単位時間あたりの 3 粒子性崩壊の微分確率 $|M_{fi}|^2$ は

$$dw = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_e + k_e + k_\mu - p_\mu)\frac{|M_{fi}|^2}{2m_\mu}\frac{d^3p_e}{(2\pi)^3 2\varepsilon_e}\frac{d^3k_e}{(2\pi)^3 2\omega_e}\frac{d^3k_\mu}{(2\pi)^3 2\omega_\mu} \tag{146.1}$$

---

1) この理由でカレント (145.12) の相互作用をしばしば，$(V-A)$－相互作用と呼ぶ．

2) CP－偶奇性の保存の原理は偶奇性非保存が発見されたあとで，エリ・デ・ランダウ (1957) により，空間の鏡映対称性を《救う》ために導入された．この原理（すなわち，同時に粒子と反粒子との置き換えを伴った空間反転に対する自然の完全な対称性）が普遍的に成り立つことは，非対称性を空間から粒子へ移すはずである．C および P の個々に対して不変でないことは，それが分子の立体異性体の存在を妨げないのと同じ意味で，空間の対称性を傷つけるものではない．しかしながら現在，結合偶奇性も保存されないような弱い相互作用の過程もまた知られている (§154)．

である．ここで $p_\mu=(m_\mu, 0)$ および $p_e=(\varepsilon_e, \boldsymbol{p}_e)$ はミューオンと電子の 4-運動量，$k_\mu=(\omega_\mu, \boldsymbol{k}_\mu)$ および $k_e=(\omega_e, \boldsymbol{k}_e)$ は二つのニュートリノ（あるいは反ニュートリノ）の 4-運動量である．

平方 $|M_{fi}|^2$ は §66 で述べられた規則にしたがって計算され，つぎのようになる．

$$|M_{fi}|^2=\frac{G^2}{2}(\bar{u}_e\mathrm{O}_\alpha u_{\nu_e})(\bar{u}_{\nu_e}\mathrm{O}_\beta u_e)(\bar{u}_{\nu_\mu}\mathrm{O}^\alpha u_\mu)(\bar{u}_\mu\mathrm{O}^\beta u_{\nu_\mu})$$

（M_{fi} は (145.7) の型をとった）．すべての粒子に対する偏りの密度行列を導入し，この式をつぎの形に書きなおす．

$$|M_{fi}|^2=\frac{G^2}{2}\mathrm{Sp}\,(\rho_e\mathrm{O}_\alpha\rho_{\nu_e}\mathrm{O}_\beta)\,\mathrm{Sp}\,(\rho_\mu\mathrm{O}^\beta\rho_{\nu_\mu}\mathrm{O}^\alpha)\equiv\frac{G^2}{2}A^{(e)}_{\alpha\beta}A^{(\mu)\beta\alpha}. \qquad (146.2)$$

(29.13) および (29.16) にしたがって電子とミューオンの密度行列は（添字 e および μ を付けた）

$$\rho=\frac{1}{2}(\hat{p}\pm m)(1-\gamma^5 a),\quad ap=0$$

となる．ここおよび以下では，上あるいは下の符号はそれぞれ μ^- あるいは μ^+ に対するものである．行列 ρ_ν に対しては

$$\rho_\nu=\hat{k}$$

と置く必要がある．これは偏りについて加えられ，質量 0 をもつ《4 成分》粒子の密度行列に対応している（ニュートリノの《2 成分性》は行列 O^α に $1+\gamma^5$ を導入することによって考慮されている）．

因子 $1+\gamma^5$ と γ^5 をまとめ，恒等的に 0 になる項（それに含まれる行列 γ の個数にしたがって）をすべて落として

$$A^{\alpha\beta}=\mathrm{Sp}\,\hat{P}\gamma^\alpha\hat{k}\gamma^\beta(1+\gamma^5),\quad P=p-ma$$

を得る．このあとで (22.13) および (22.20) を使って計算すると

$$A^{\alpha\beta}=4[P^\alpha k^\beta+P^\beta k^\alpha-(Pk)g^{\alpha\beta}-ie^{\alpha\beta\gamma\delta}P_\gamma k_\delta] \qquad (146.3)$$

となる．(146.2) に代入し，掛け算を行なって

$$|M_{fi}|^2=32G^2[(p_e k_\mu)-m_e(a_e k_\mu)][(p_\mu k_e)-m_\mu(a_\mu k_e)] \qquad (146.4)$$

を得る[1]．

確率 (146.1) のニュートリノの運動量についての積分はつぎの積分の計算に帰する．

1) $e_{\alpha\beta\rho\sigma}e^{\gamma\delta\rho\sigma}=-2(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta-\delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta)$ であることを思い起こそう．

$$I^{\alpha\beta}=\int\frac{k_e^\alpha k_\mu^\beta}{\omega_e\omega_\mu}\delta^{(4)}(k_e+k_\mu-q)\,d^3k_e\,d^3k_\mu,\qquad q=p_\mu-p_e\equiv(\omega,\boldsymbol{q}). \tag{146.5}$$

この積分は，明らかに

$$I^{\alpha\beta}=Aq^2q^{\alpha\beta}+Bk^\alpha k^\beta$$

の形になる．A および B を決めるために

$$I_\alpha^\alpha=(4A+B)q^2=Iq^2/2,\quad I^{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta=(A+B)(q^2)^2=I(q^2)^2/4$$

と書こう．ここで等式 $q=k_e+k_\mu$, $k_e^2=k_\mu^2=0$ を使った．またスカラー積分

$$I=\int\frac{d^3k_e\,d^3k_\mu}{\omega_e\omega_\mu}\delta^{(4)}(k_e+k_\mu-q)$$

を I と置いた．d^3k_μ についての積分は因子 $\delta(\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\mu-\boldsymbol{q})$ を消去する．そのあとで

$$I=\int\frac{d^3k_e}{\omega_e\omega_\mu}\delta(\omega_e+\omega_\mu-\omega)$$

となる．このスカラーを2個のニュートリノの重心系（$\boldsymbol{k}_e+\boldsymbol{k}_\mu=0$, $\omega_e=\omega_\mu$）で計算し

$$I=\int\frac{4\pi\omega_e^2\,d\omega_e}{\omega_e^2}\delta(2\omega_e-\omega)=2\pi$$

を得る．最後に $I^{\alpha\beta}$ に対して

$$I^{\alpha\beta}=\frac{\pi}{6}(q^2g^{\alpha\beta}+2q^\alpha q^\beta) \tag{146.6}$$

を得る．得られた式を集めて，単位時間あたりの崩壊の微分（電子の運動量についての）確率に対して

$$dw=\frac{G^2}{6(2\pi)^4m_\mu}(p_e\mp m_ea_e)_\alpha(p_\mu\mp m_\mu a_\mu)_\beta(q^2g^{\alpha\beta}+2q^\alpha q^\beta)\frac{d^3p_e}{\varepsilon_e} \tag{146.7}$$

を得る．ミューオンの崩壊で放出されるエネルギーは電子の質量にくらべて大きい．したがって，そのスペクトルのほとんど全区間にわたって，崩壊電子は超相対論的と考えることができる．また (146.7) の4次元の式を展開するとき $\sim m_e/\varepsilon_e$（および同様にして$\sim m_e/m_\mu$）の大きさを無視することができる．ミューオンの静止系では

$$q^2=m_\mu^2-2m_\mu\varepsilon_e,\quad(p_eq)=(p_ep_\mu)=\varepsilon_em_\mu,\quad(qp_\mu)=m_\mu^2-\varepsilon_em_\mu$$

となる（ここでも $\sim m_e^2/\varepsilon_e^2$ の項は落とした）．この同じ系で 4－ベクトル a_μ および a_e はつぎの成分をもっている．

$$a_\mu=(0,\boldsymbol{\zeta}_\mu),\quad a_e=(1,\boldsymbol{n}_e)\frac{\varepsilon_e}{m_e}\boldsymbol{n}_e\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}.$$

ここで $\boldsymbol{n}_e=\boldsymbol{p}_e/\varepsilon_e$ は電子の方向である．また $\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}$ および $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ は電子およびミューオンの偏りのベクトルである（$\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}$ につけられた添字 (d) は，これが測定器によってとり出された，終りの粒子の決まった偏りであることを示している）．簡単な変形ののち，偏ったミューオンの崩壊のときの，電子のエネルギーと方向についての分布に対し最終的につぎのような式を得る．

$$dw=\frac{G^2m_\mu^5}{3\cdot 2^8\pi^4}(1\mp\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}\boldsymbol{n}_e)\left[\left(3-2\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{\max}}\right)\pm\boldsymbol{\zeta}_\mu\boldsymbol{n}_e\left(1-2\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{\max}}\right)\right]\frac{\varepsilon_e^2\,d\varepsilon_e\,do_{\boldsymbol{n}}}{\varepsilon_{\max}^3}. \tag{146.8}$$

ここで $\varepsilon_{\max}\approx m_\mu/2$ は，電子のエネルギーがとりうる最大値である（これには，二つのニュートリノが一方向へ，そして電子が逆方向へ飛び出すときに到達する）．(146.8) のなかで $\boldsymbol{\zeta}_e\boldsymbol{n}_e$ あるいは $\boldsymbol{\zeta}_\mu\boldsymbol{n}_e$ に比例する項は，空間偶奇性の非保存の結果であることに注目しよう．これらの項は空間反転のとき符号を変える．したがって，この変換に関する不変性の条件により禁止されるはずである．

(146.8) の電子の偏りについて加え，その方向について積分したあとで

$$dw_\varepsilon=w\cdot 2\left(3-2\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_{\max}}\right)\frac{\varepsilon_e^2\,d\varepsilon_e}{\varepsilon_{\max}^3} \tag{146.9}$$

を得る[1]．ここで w は崩壊確率

$$w=\frac{G^2m_\mu^5}{192\pi^3} \tag{146.10}$$

である．

崩壊確率の $\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}$ への依存性が因子 $(1\mp\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}\boldsymbol{n}_e)$ で与えられる事実は，粒子の偏りのベクトルそのもの（測定量とは関係のない）が $\boldsymbol{\zeta}_e=\mp\boldsymbol{n}_e$ に等しいこと，すなわち電子（あるいは陽電子）が，その運動方向と反対に（あるいは同方向に）完全に偏っていることを意味している．この結果は前から予見することができたはずである．すなわち，行列要素 (145.8) のなかには振幅 u_e の（そのスピノール表示で）η－成分だけが現われている．超相対論的電子に対しては，この成分は螺線度 $\lambda=-1/2$（そして陽電子に対しては螺線度 $\lambda=+1/2$）が対応する．

---

1) この分布は $\varepsilon_e\sim m_e$ のときには使えない．しかしながら，上述の計算で m_e/ε_e についてのより高次の項の考慮は，それ自体は意味をもたない．それは電子のスペクトルの始めの部分では輻射補正が重要になるからである．

$\varepsilon_e\gg m_e$ のときに，偏りについて平均された分布 (146.9) の誤差は $\sim m_e^2/\varepsilon_e^2$ であることを指摘しておこう．

しかしながら，電子の波動関数のスピノール成分と λ の一定値との一義的な対応は，その質量を完全に無視した極限でのみ起こる（このときスピノール η および ξ に対する方程式は分離される）．電子の質量の有限性を考慮したつぎの近似では，($\boldsymbol{n}_e$ の方向の) 縦の偏極度の変化とともに，ベクトル $\boldsymbol{\zeta}_e$ の横成分もまた現われる．もちろん，この成分は偏ったミューオンの崩壊の際にのみ存在し，ベクトル $\boldsymbol{n}_e$ と $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ でつくられる平面内にある．この平面に垂直な方向の電子の偏りは，T-不変性の要求により禁止される．実際に，崩壊確率に対する式のなかで $\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}[\boldsymbol{n}_e\boldsymbol{\zeta}_\mu]$ の形の項がそれに対応する．しかしこのような項は変換

$$\boldsymbol{n}_e \to -\boldsymbol{n}_e, \quad \boldsymbol{\zeta}_e^{(d)} \to -\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\mu \to -\boldsymbol{\zeta}_\mu \tag{146.11}$$

の際に不変ではない（符号を変える）．この変換は，摂動論の1次近似の S-行列のエルミート性の要求と一緒にして時間反転を表わしている（(87.26) 参照）．

問　　題

1. 電子によるニュートリノの弾性散乱の断面積を計算せよ．

解　散乱振幅は

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}(p')O^\alpha u(p)][\bar{u}(k')O_\alpha u(k)]$$

である．ここで $p=(\varepsilon, \boldsymbol{p})$, $k=(\omega, \boldsymbol{k})$ および，p', k' は電子とニュートリノの始めと終りの 4-運動量である．電子の終りの偏りについて加え，始めの偏りについて平均された平方 $|M_{fi}|^2$ は

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{偏り}}|M_{fi}|^2 = 2\cdot 32G^2(pk)(p'k') = 64G^2(pk)^2$$

である（(146.3) 参照）．(65.19) にしたがって全断面積は

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi^2}\frac{(pk)^2}{(p+k)^2}4\pi$$

である．重心系では

$$pk = \varepsilon\omega + \omega^2, \quad (p+k)^2 = (\varepsilon+\omega)^2, \quad \varepsilon = \sqrt{m_e^2+\omega^2}$$

である[1]．したがって

---

1) 弱い相互作用の局所性から，散乱では s-波だけが参加するとした．ユニタリー性の条件にしたがって，この断面積は $\sim\omega^{-2}$ を超えない（III，(122.12) 参照）．それにもかかわらず，得られた結果は ω の増大とともに大きくなり，$\omega \sim G^{-1/2}$ のときすでに上に示した上限に達してしまう．このことからも，上述の理論が，このようなエネルギー領域ではあらゆる場合に不適当であると結論することができる．

$$\sigma = \frac{4G}{\pi}\omega^2$$

となる．σ を，実験室系のニュートリノのエネルギー Ω を使って表わして（$kp = m_e\Omega$, $(k+p)^2 = m_e^2 + 2m_e\Omega$）

$$\sigma = \frac{4G^2m_e^2}{\pi}\frac{(\Omega/m_e)^2}{1+2\Omega/m_e}$$

を得る．

2. 電子による反ニュートリノの散乱で同じことを行なえ．

解 散乱振幅は

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}}[\bar{u}(p')\mathrm{O}^\alpha u(p)][\bar{u}(-k)\mathrm{O}_\alpha u(-k')]$$

である．つぎに

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{偏り}}|M_{fi}|^2 = 64G^2(pk')(p'k) = 64G^2(pk')^2$$

である．重心系における断面積は

$$d\sigma = \frac{G^2}{\pi^2}\frac{\omega^2(\varepsilon+\omega\cos\theta)^2}{(\varepsilon+\omega)^2}do'$$

となる（θ は散乱角である）．全断面積は

$$\sigma = \frac{4G^2}{3\pi}\frac{\omega^2(3\varepsilon^2+\omega^2)}{(\varepsilon+\omega)^2}$$

となり，実験室系では

$$\sigma = \frac{2G^2m_e\Omega}{3\pi}\left[1-\left(1+2\frac{\Omega}{m_e}\right)^{-3}\right]$$

となる．

3. 反応 $\nu_\mu + e^- \to \nu_e + \mu^-$ について同じことを行なえ．

解 問題1と違い今度は 4－運動量 p, p' は異なる質量の粒子（e と μ）に関するものである．重心系で運動量の大きさ $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{k}| = \omega$ および $|\boldsymbol{p}'| = |\boldsymbol{k}'| = \omega'$ は等しい．(65.19) を使って全断面積に対して

$$\sigma = \frac{4G^2}{\pi}\omega'^2$$

を得る．ここで ω' は終りのニュートリノのエネルギーである．

§147. ミューオン崩壊に対する輻射補正

弱い相互作用のハミルトニアン (145.11) が摂動論の1次近似でのみ意味があることはすでに言及した．したがって G についての高次の補正は現在の理論では意味をもたない．しかしながら，荷電レプトン，すなわち電子やミューオンは弱い相互作用のほかに，これも同時に弱いと考えられる電磁相互作用もまた可能である．まず第一にこの相互作用を考慮すると一つの現実の過程が出てくる．すなわちミューオン崩壊の際の光子放出と，電子－陽電子対の生成である．第二にミューオンおよび電子による仮想的光子の放出および吸収を勘定に入れた崩壊確率の輻射補正が生じる．

つぎのハミルトニアンは二つの相互作用を同時に考慮したものである．すなわち

$$\mathrm{H}_{相互} = \mathrm{H}_w + \mathrm{V}. \tag{147.1}$$

ここで H_w は (145.11) で与えられ，V はミューオンと電子の電磁相互作用の演算子

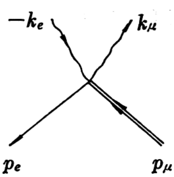
$$\mathrm{V} = e\int(\bar{\phi}_e\hat{\mathrm{A}}\phi_e + \bar{\phi}_\mu\hat{\mathrm{A}}\phi_\mu)\,d^3x \tag{147.2}$$

である．ここで H_w については1次だけの項を考慮することが許される．しかし V については一般に任意の次数でよい．散乱演算子 S はしたがって

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \mathrm{T}\exp\left\{-i\int[\mathrm{H}_w(t) + \mathrm{V}(t)]\,dt\right\}\\ &\approx \mathrm{S}_{電} - i\mathrm{T}\left\{\int \mathrm{H}_w(t)\,dt e^{-i\int \mathrm{V}(t)\,dt}\right\}\end{aligned} \tag{147.3}$$

の形になる ((73.9) 参照)．ここで $\mathrm{S}_{電}$ は純電磁的遷移に関するものである．この式を§78で記述されたような方法で扱い，電磁相互作用については任意の次数の過程の振幅の計算に対して，図形手法を使うことは容易である．

V についてのゼロ近似では，当然予期されるように，**4－フェルミオン頂点**の図形で記述されるミューオン崩壊の振幅に対する結果 (145.6) を得る．すなわち



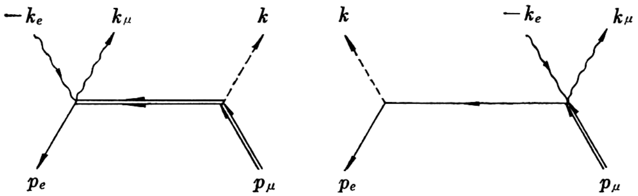
$$= iM_{fi} = -\frac{iG}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{\nu\mu}\mathrm{O}^\alpha u_{\nu e})(\bar{u}_e\mathrm{O}_\alpha u_\mu) \tag{147.4}$$

である（ミューオン線は電子線と区別して2本で描かれている．波型の線はニュートリノ

に対応する)[1].

電磁相互作用についてのつぎの近似のさらに複雑な図形は，普通の規則にしたがって，仮想的および現実の光子線および閉じた電子およびミューオン環を付け加えることにより (147.4) から得られる．もちろん，光子線は荷電粒子，すなわち電子およびミューオンの線からのみ分岐することができる．ニュートリノ線はいつも外端の対のままである．これはこの過程の振幅の因子 $-\dfrac{iG}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{\nu_\mu}O^\alpha u_{\nu_e})$ に対応する．ミューオンおよび電子線に関しては，4－フェルミオン頂点の頂点演算子の役割は (同じ4－ベクトル添字をもつ) 行列 O^α が演じる．

つぎの二つの図形が電磁相互作用について1次である．



(147.5)

これはミューオン崩壊の際の光子 k の放出過程を記述する (**内部制動輻射**)．図形を使う例として，この過程の振幅を書こう．

$$M_{fi} = -\sqrt{4\pi}\, e\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{\nu_\mu}O_\alpha u_{\nu_e})(\bar{u}_e Q^{\alpha\beta}u_\mu)e^*_\beta,$$

$$Q^{\alpha\beta} = \frac{O^\alpha(\hat{p}_\mu - \hat{k} + m_\mu)\gamma^\beta}{(p_\mu - k)^2 - m_\mu^2} + \frac{\gamma^\beta(\hat{p}_\mu - \hat{k}_e - \hat{k}_\mu + m_e)O^\alpha}{(p_\mu - k_e - k_\mu)^2 - m_e^2}$$

である．

この過程の確率は (65.11) にしたがって振幅を使って表わされる．ここでは参考のため，同時に光子 $k=(\omega, \boldsymbol{k})$ の放出を伴うミューオン (μ^+ あるいは μ^-) の崩壊確率を導こう．これは全粒子の偏りについて加えられ，二つのニュートリノの運動量について積分されたものである．すなわち

$$dw_{p_e k} = -\frac{\alpha G^2}{6(2\pi)^6}\frac{d^3p_e}{\varepsilon_e m_\mu}\frac{d^3k}{\omega}\left\{\left[\frac{m_\mu^4}{2} - q^2\left(q^2 - \frac{m_\mu^2}{2}\right)\right]\left(\frac{p_\mu}{(p_\mu k)} - \frac{p_e}{(p_e k)}\right)^2 - 4q^2 - \frac{(kq)^2}{(p_e k)m_\mu\omega}(2q^2 + m_\mu^2)\right\} \quad (147.6)$$

---

1) はっきりさせるために，ここではハミルトニアン H_w のなかの (145.8) の形の項で記述されるミューオン崩壊をもつ過程だけを考察する．電子によるニュートリノの散乱その他の過程に対しても類似の図形が得られる．

である．ここで $q=p_\mu-p_e-k$ である (A. Lenard, 1953)．この公式はミューオンの静止系で書かれ，そのなかで m_e^2 は m_μ^2 にくらべて無視されている．

(147.6) で光子のエネルギーが十分に小さい極限の場合には，うしろの 2 項は落とし，第 1 項では $q=p_\mu-p_e$ と置くことができる．§95 の結果に対応して，(147.6) はこのとき $dw_{\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{k}}=dw_{\boldsymbol{p}_e}dw_{\boldsymbol{k}}$ のように分けられる．《弾性》過程の確率（光子放出を伴わないミューオン崩壊の確率）と因子

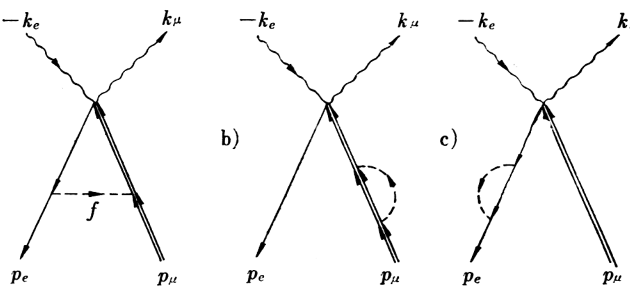
$$dw_{\boldsymbol{k}}=-\alpha\left[\frac{p_e}{(p_ek)}-\frac{p_\mu}{(p_\mu k)}\right]^2\frac{d^3k}{4\pi^2\omega} \tag{147.7}$$

との積である．これは荷電粒子発生の際の古典的輻射強度を ω で割ったものと一致している (II, §69 の問題参照)．光子のとび出す角度についての積分の結果を借りて ($\varepsilon_e\gg m$ のとき)

$$dw_\omega=\frac{2\alpha}{\pi}\left(\ln\frac{2\varepsilon_e}{m}-1\right)\frac{d\omega}{\omega} \tag{147.8}$$

を得る．

電磁相互作用についての 2 次では，ミューオン崩壊時の 2 光子同時放出を記述する図形が現実の過程に対応する．この次数の残りの図形は崩壊確率に対する輻射補正を与える．つぎの形の図形がこれである．



(147.9)

これらのなかの 1 番目 (4－フェルミオン頂点への補正) は，この過程の振幅には

$$M_{fi}^{(a)}=\frac{ie^2G}{\sqrt{2}}(\bar{u}_{\nu_\mu}\mathrm{O}_\alpha u_{\nu_e})(\bar{u}_e\mathrm{Q}^\alpha u_\mu)$$

に等しい寄与をする．ここで

$$\mathrm{Q}^\alpha=\int\frac{\gamma^\beta(\hat{p}_e+\hat{f}+m_e)\mathrm{O}^\alpha(\hat{p}_\mu+\hat{f}+m_\mu)\gamma_\beta}{[(p_e+f)^2-m_e^2][(p_\mu+f)^2-m_\mu^2](f^2-\lambda^2)}\frac{d^4f}{4\pi^3} \tag{147.10}$$

である.《光子の質量》λ は赤外発散を消去するために導入された. 積分 (147.10) は f が大きいところで対数発散をする. したがって, §127 の規則にしたがってこれを直接に計算すると, 仮想的光子の運動量の大きいところにあらわな形の切断を導入しなければならない. すなわち d^4f についての積分領域を, 条件

$$|f^2| \leqslant \Lambda^2, \quad \Lambda^2 \gg m_\mu^2$$

によって制限することになる[1]. このあとで $M_{fi}^{(a)}$ は $\ln\Lambda$ に依存する. この依存性は図形の外端のくり込みによって, すなわち図形 (147.9, b, c) を考慮することによって消去される. §107 にしたがって ((107.15) 参照), このくりこみはゼロ近似の振幅 $M_{fi}^{(0)}$ を

$$M_{fi}^{(0)}\sqrt{Z_{1e}Z_{1\mu}} \approx M_{fi}^{(0)}\left(1+\frac{1}{2}Z_{1e}^{(1)}+\frac{1}{2}Z_{1\mu}^{(1)}\right)$$

で置き換えることに帰してしまう. ここで $Z_{1e}=1+Z_{1e}^{(1)}$, $Z_{1\mu}=1+Z_{1\mu}^{(1)}$ はくりこみ定数 (電子, およびミューオン伝播関数の極の留数) である. 言いかえれば, 振幅中の図形 (147.9, b) および (147.9, c) の寄与は

$$M_{fi}^{(b)}+M_{fi}^{(c)}=M_{fi}^{(0)}\frac{1}{2}(Z_{1e}^{(1)}+Z_{1\mu}^{(1)}) \tag{147.11}$$

に等しい. (116.7 a) にしたがって定数は

$$Z_{1e}^{(1)}=-\frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{m_e^2}+\frac{9}{4}+\ln\frac{\lambda^2}{m_e^2}\right]$$

であり, $Z_{1\mu}^{(1)}$ に対しては m_e を m_μ で換えた類似の式である.

このようにして, ミューオン崩壊の振幅に対する正則化された補正は

$$\delta M_{fi}=M_{fi}^{(a)}+M_{fi}^{(b)}+M_{fi}^{(c)}$$

となる. この量はもはや Λ を含まず, それゆえ有限である[2]. この行列の構造は, 電磁相互作用で乱されない振幅 $M_{fi}^{(0)}$ の構造と異なることを指摘しよう. この意味で, 輻射補正は弱い $(V-A)$-相互作用の《普遍性》を破るということができる.

振幅 $M_{fi}=M_{fi}^{(0)}+\delta M_{fi}$ は《光子の質量》λ に依存する. この依存性を消去するために, いつものように, 同時に質量 λ の光子の放出を伴う崩壊確率を崩壊確率に付け加える必要がある. 全確率では $\lambda\to 0$ の極限に移行することができる. 前と同様な場合には (§§119, 130), ある小さい $\omega_{\max}$ より小さいエネルギーをもつ軟光子と考えて, この手

1) 類似の積分 (114.3) (電子形状因子への補正) は, §114 で分散式による方法で計算された.
2) このような打ち消しあいは, 電磁相互作用についてのもっと高次の近似でも起こっていることを示すことができる.

続きを行なった．しかしながら，この場合には，現実の実験装置の観点からは，任意の（そして小さいものに限らない）エネルギーの光子の可能な放出を勘定に入れた全崩壊確率の方がはるかに重要な量になる．このような確率は (146.1) の和によって与えられる．このとき振幅の平方には

$$|M_{fi}|^2 \approx |M_{fi}^{(0)}|^2 + (M_{fi}^{(0)}\delta M_{fi}^* + M_{fi}^{(0)*}\delta M_{fi}),$$

および (147.6) を代入する必要がある．後者は $k^2 = \lambda^2$ の仮定のもとに d^3k について積分しなければならない．この積分は (147.10) の積分と同様に非常に複雑である．

われわれは偏りのないミューオン（μ^+ あるいは μ^-）の崩壊の際の電子のエネルギー分布に対しては，電子の偏りについて加えられた最終結果だけを導こう．これは

$$dw_\varepsilon = \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}h(x)\right]dw_\varepsilon^{(0)} \tag{147.12}$$

である．ここで $dw_\varepsilon^{(0)}$ は分布 (146.9) で，関数 $h(x)$ は

$$\begin{aligned} h(x) = &-4F(-x) - \frac{2\pi^2}{3} \\ &+ 3L - 4 + 2\ln x[3\ln(1-x) - 2\ln x - 2L + 1] \\ &+ 2\left(2L - 1 - \frac{1}{x}\right)\ln(1-x) + \frac{6(1-x)}{3-2x}\ln x \\ &+ \frac{(1-x)}{3x^2(3-2x)}[(5+17x-34x^2)(L+\ln x) - 22x + 34x^2]. \end{aligned}$$

ここで $x = \varepsilon_e/\varepsilon_{\max}$，$L = \ln(m_\mu/m_e)$ であり，$F(x)$ はスペンス関数 (127.19) である (S. M. Berman, 1958)．この公式は $m_e/\varepsilon_e \ll 1$ の条件のとき，$m_e \to 0$ としたとき0になるすべての項を省略して書かれている．関数 $h(x)$ のいくつかの数値が第3表に示してある．$x \to 0$ および $x \to 1$ のとき，関数 $h(x)$ は（それぞれ $x^{-2}\ln x$ および $\ln(1-x)$

第3表

x	$100\frac{\alpha}{2\pi}h(x)$	x	$100\frac{\alpha}{2\pi}h(x)$
0.2	9.69	0.7	−0.23
0.3	5.54	0.8	−1.42
0.4	3.43	0.9	−3.06
0.5	2.01	0.94	−4.16
0.6	0.85	0.98	−6.45

のように）無限に増大してゆく．したがって，摂動論の公式の適用性は破られる．しかしながら，（すべてのエネルギーについての）全崩壊確率は有限にとどまる．ミューオンの

寿命に対する輻射補正は $\delta\tau = +4.4\cdot10^{-3}\tau_0$ に等しい. ここで τ_0 は補正を考慮せずに計算された寿命である.

§148. ハドロンの弱いカレントの運動学的構造

レプトンとともにハドロンもまた加わる過程の振幅は

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}}\langle l_f | j_w | l_i \rangle \langle h_f | J_w | h_i \rangle \qquad (148.1)$$

の形に表わすことができる. ここで第一の因子はレプトンの遷移カレント, 第二のはハドロンの弱い遷移カレントである (l_i, h_i および l_f, h_f はそれぞれ始めと終りのレプトンとハドロンに対応する). これらの因子は互いに独立であると仮定されるが, それはつぎのような意味である. すなわち, これらのおのおのがその独立変数 (4－運動量および螺線度) の関数としては, もう一方の因子の遷移がどのような種類の粒子間に起こるかにはよらないという意味である[1]. このとき, レプトンの行列要素は純粋なレプトン反応のときと同じ形をもつと仮定するのが自然である. ハドロンの弱いカレントに関しては, ハドロンの電磁カレントに関して §139 の初めに述べられたすべてのことがあてはまる. すなわち, それはそのなかに含まれる仮想的な強い相互作用と分離することができない.

ただ現象論的な考察だけから出発してハドロンの遷移カレントの性質を議論できることを明らかにしよう. 純運動学的な要求のほかに, 反応振幅がレプトンによりつくられる全 4－運動量のみ (それらのおのおのの 4－運動量個々にではなく) に依存しうるという事実もまた使おう. この要求は, すでに §145 で指摘された, 弱い相互作用のハミルトニアンの《局所性》を表わしたものである.

逐次いろいろの型の反応を考察しよう.

1) 中間子のレプトンへの崩壊

$$\pi^\pm \to l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l), \quad K^\pm \to l^\pm + \nu_l(\bar{\nu}_l)$$

(ここで $l = e$ あるいは μ である). はっきりさせるために崩壊

$$\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e \qquad (148.2)$$

について述べよう. ハドロンカレントをつくるために, われわれの手元にはただ, 擬スカラー u_π, すなわち中間子の波動関数の振幅, および 4－ベクトル $q = p_\mu + p_\nu$, すなわ

1) これにより特に, いま考えられている過程への, 粒子間の (もしあれば) 電磁相互作用の影響は無視することは暗に了解されているものとする.

ちレプトンの全運動量があるだけである[1]. これらからつくられた遷移カレントの 4－ベクトルは

$$\langle 0 | J_w^\alpha | \pi \rangle = f u_\pi q^\alpha \tag{148.3}$$

である. ここで f は不変な係数（形状因子）で, 今の場合には定数になる. なぜかというと, それが依存することができる唯一の不変量が定数だからである. すなわち $q^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$ である. q^2 および $f(q^2)$ の値は発生するレプトン l の質量には依存しない. したがって崩壊 $\pi \to e + \nu$ および $\pi \to \mu + \nu$ に対して同一である[2].

(148.3) にレプトン遷移カレント

$$\langle e | j_w^\alpha | \nu \rangle = \bar{u}_e \gamma^\alpha (1 + \gamma^5) u_\nu$$

を掛け, 崩壊振幅

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi (\bar{u}_e \hat{q} (1 + \gamma^5) u_\nu)$$

を得る. 最後に, $q = p_e + p_\nu$ と書き, 電子およびニュートリノに対するディラック方程式

$$\bar{u}_e \hat{p}_e = m_e \bar{u}_e, \quad \hat{p}_\nu u_\nu = 0$$

を使って

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} f u_\pi m_e (\bar{u}_e (1 + \gamma^5) u_\nu) \tag{148.4}$$

を得る.

崩壊 (148.2) で跳び出す電子は完全に縦方向に偏っている. このときその螺線度の符号は $\bar{\nu}_e$ の螺線度の符号と一致する. 実際に, 2 粒子性崩壊では粒子の螺線度は関係式 $\lambda_\pi = \lambda_e - \lambda_{\bar{\nu}}$ で結ばれる ((70.12) 参照). この場合 $\lambda_\pi = 0$, ゆえに $\lambda_e = \lambda_{\bar{\nu}} = 1/2$ である (同様に跳び出す陽電子に対しては, $\lambda_{\bar{e}} = \lambda_\nu = -1/2$ である). このようにして, 電子の偏りは, 角運動量の保存則によって一意的に定義される《強制的》性格をもっている. これらの事情と (148.4) 中の因子 m_e の存在とのあいだの関係を指摘しよう. §146 の末尾に, レプトンの弱いカレントの構造は発生する電子が $m_e \to 0$ の極限で螺線度 $\lambda_e = -1/2$ をもつものであることが示された. したがって, $\lambda_e = 1/2$ でなければならないような崩

1) スピン 0 の粒子の波動振幅は条件 $u_\pi u_\pi^* = 1$ で規格化されているものと仮定される (§10). 崩壊確率の具体的な計算の際は, 単に $u_\pi = 1$ と仮定することができる.

2) 形状因子 f は質量の次元をもつ. 経験的な値は, $|f_\pi| = 0.94 m_\pi$, $|f_K| = 0.072 m_K$, $|f_\pi|/|f_K| = 3.7$ である.

壊確率は，$m_e \to 0$ の極限では0にならなければならない．

2) 中間子の他の中間子およびレプトンへの崩壊

$$\pi^{\pm} \to \pi^0 + l^{\pm} + \nu_l(\bar{\nu}_l), \tag{148.5}$$

ここでふたたび $l = e$ あるいは μ である（他の例は $K^{\pm} \to \pi^0 + l^{\pm} + \nu_l(\bar{\nu}_l)$）．ハドロン遷移カレントは擬スカラー u_{π^0} および $u_{\pi^{\pm}}$，すなわち中間子の波動振幅，およびわれわれの手元にある4－運動量からつくられる．後者のなかには中間子の始めの4－運動量（p_1），終りの運動量（p_2）またレプトンの全4－運動量 q があるが，保存則 $p_1 = p_2 + q$ のためにこれらのなかの二つだけが独立である．行列要素の一般形は

$$\langle \pi^0 | J_w^{\alpha} | \pi^{\pm} \rangle = u_{\pi^0}^* u_{\pi^{\pm}} (f_1 P^{\alpha} + f_2 q^{\alpha}) \tag{148.6}$$

である．ここで $P = p_1 + p_2$ である．f_1，f_2 は4－運動量の不変関数（形状因子）である．p_1 および p_2 からは唯一つの独立な（定数に帰さない）不変量をつくることができる．すなわち q^2 である．したがって f_1，f_2 は一つの独立変数の関数になる．

カレント(148.6)(同じことが(148.3)にも成り立つ)は完全に定義された時空間の性質をもっていることに注目しよう．両方の中間子の内部偶奇性が同じときにカレント(148.6)は真正4－ベクトルである．この事情は中間子にスピンがないことと関係がある．

崩壊(148.5)では，レプトン l (e あるいは μ) の偏りは，崩壊(148.2)におけるように《強制的》性格をもたない．もしも $l = e$ ならば，電子の質量を無視して，e^- はふたたび（ミューオン崩壊におけるように──§146）自動的に螺線度 $-1/2$ を，また e^+ は螺線度 $+1/2$ をもつであろう．π^0 がエネルギーをもたず e と ν が反対側に跳び出すときだけが例外である．したがって $m_e \to 0$ の近似で，このような崩壊の確率は0になる．

3) バリオンの他のバリオンとレプトンへの崩壊，たとえば β－崩壊[1)]

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e. \tag{148.7}$$

スピン1/2をもつ粒子に対するハドロン遷移カレントの形についての問題は，すでに§139で電磁的な場合に考察されている．そこでは遷移が1個の粒子（光子）の放出を伴うが，ここでは2個の粒子（e および ν）の放出を伴うことは重要ではない．それはカレントにはただレプトンの全4－運動量だけが含まれ，この意味では1個の粒子と同等であるからである．しかしながら，遷移カレントは今は横波条件を満足しなければならぬわけではない．電磁的な場合にこの条件は電荷の保存と結びつけられたが，弱い相互作用の場合には

1) ハイペロンの崩壊もこれに属する．すなわち $\Lambda \to p + l^- + \bar{\nu}_l$，$\Sigma^+ \to \Lambda + l^{\pm} + \nu_l(\bar{\nu}_l)$ その他である．

類似の保存則は一般には存在しない（われわれは §150 でこの問題にたちもどることにする）．このほか，弱いカレントは真正ベクトル部分も擬ベクトル部分も含むことができる．

§113 で，われわれの手元にある量を使って，三つの独立な真正 4－ベクトルをつくることができることを見てきた．すなわち

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha u_n, \quad (\bar{u}_p \sigma^{\alpha\beta} u_n) q_\beta, \quad (\bar{u}_p u_n) q^\alpha$$

である．ここで u_n, u_p はそれぞれ始めのバリオン (n) と終りのバリオン (p) の波動振幅で，$q = p_p - p_n$ である．同様にして，余分な行列 γ^5 を含む 4－擬ベクトルがつくられる．三つの独立な擬ベクトルとして

$$\bar{u}_p \gamma^\alpha \gamma^5 u_n, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) P^\alpha, \quad (\bar{u}_p \gamma^5 u_n) q^\alpha$$

を選ぼう．ここで $P = p_p + p_n$ である．このようにして，バリオンの弱い遷移カレントは

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p (f_1 \gamma^\alpha + f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta + f_3 q^\alpha) u_n + \bar{u}_p (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha + g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_n \tag{148.8}$$

になる．形状因子 f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 は不変量 q^2 の関数である．

問　　題

1.　崩壊 $\pi \to \mu + \nu$ および $\pi \to e + \nu$ の崩壊確率を求めよ．

解　崩壊確率は（パイオンの静止系で）

$$w = (2\pi)^4 \iint \delta^{(4)}(p_\pi - p_l - p_\nu) \frac{|M_{fi}|^2}{2m_\pi} \frac{d^3 p_l}{(2\pi)^3 2\varepsilon_l} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2\varepsilon_\nu}$$

である．そして，レプトン l の偏りについて加えられた平方 $|M_{fi}|^2$（M_{fi} は (148.3) を使う）は

$$\sum_{\text{偏り}} |M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} |f|^2 m_l^2 \, \mathrm{Sp}\, \hat{p}_\nu (1 + \gamma^5)(\hat{p}_l + m_l)(1 + \gamma^5) = 4G^2 m_l^2 (p_l p_\nu)$$

となる．この式は定数になる．それは $(p_l + p_\nu)^2 = p_\pi^2 = m_\pi^2$ から

$$p_l p_\nu = \frac{1}{2}(m_\pi^2 - m_l^2)$$

であることが出てくる．積分

$$I = \iint \frac{d^3 p_l \, d^3 p_\nu}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu} \delta^{(4)}(p_\pi - p_l - p_\nu) = \int \frac{d^3 p_\nu}{\varepsilon_l \varepsilon_\nu} \delta(m_\pi - \varepsilon_l - \varepsilon_\nu)$$

が残る．$|\mathbf{p}_l| = |\mathbf{p}_\nu| = \varepsilon_\nu$ であることに気付くと

$$I=\int\frac{4\pi\varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu\varepsilon_l}\delta(m_\pi-\varepsilon_\nu-\varepsilon_l)=\frac{4\pi\varepsilon_\nu}{\varepsilon_l\dfrac{d}{d\varepsilon_\nu}(\varepsilon_\nu+\varepsilon_l)}=\frac{4\pi\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu+\varepsilon_l}=2\pi\,\frac{m_\pi^2-m_l^2}{m_\pi^2}$$

となり，最終的に

$$w=\frac{G^2|f|^2}{8\pi}m_\pi m_l^2\left(1-\frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2$$

となる．二つの崩壊の確率の比は

$$\frac{w(\pi\to e+\nu)}{w(\pi\to\mu+\nu)}=\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left(\frac{m_\pi^2-m_e^2}{m_\pi^2-m_\mu^2}\right)^2\approx 1.3\cdot 10^{-4}$$

となり，これは m_e/m_μ の比だけで決定される．

2. 崩壊 $K^\pm\to\pi^0+e^\pm+\nu_e(\bar\nu_e)$ の（エネルギー ε_π についての）微分確率を見いだせ．

解 ハドロンおよびレプトン遷移カレントは

$$\langle\pi^0|J_w|K^-\rangle=f_1p_K+f_2p_\pi=(f_1+f_2)p_K-f_2(p_e+p_\nu),$$
$$\langle e|j_w|\nu\rangle=\bar u_e\gamma(1+\gamma^5)u_\nu$$

である．これらを掛けあわせ，u_e および u_ν に対するディラック方程式を使い，電子の質量を質量 m_π および m_K にくらべて無視し，散乱振幅

$$M_{fi}=\sqrt{2}\,Gf\bar u_e\hat p_K(1+\gamma^5)u_\nu,\quad f=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$$

を得る[1]．崩壊確率は（K の静止系で）

$$dw=(2\pi)^{-5}\frac{|M_{fi}|^2}{2m_K}\frac{d^3p_e}{2\varepsilon_e}\frac{d^3p_\nu}{2\varepsilon_\nu}\frac{d^3p_\pi}{2\varepsilon_\pi}\delta^{(4)}(p_K-p_\pi-p_e-p_\nu) \tag{1}$$

となる．偏りについて加えたあとで

$$\sum_{\text{偏り}}|M_{fi}|^2=2G^2|f|^2\,\mathrm{Sp}\,\hat p_\nu\hat p_K(1+\gamma^5)\hat p_e\hat p_K(1+\gamma^5)$$
$$=4G^2|f|^2\,\mathrm{Sp}\,\hat p_\nu\hat p_K\hat p_e\hat p_K=16G^2|f|^2\{2(p_ep_K)(p_\nu p_K)-p_K^2(p_ep_\nu)\} \tag{2}$$

である．$d^3p_e\,d^3p_\nu$ についての積分は (146.5)，(146.6) を使って行なわれ，つぎの結果を与える．

$$dw=\frac{G^2m_K}{12\pi^3}|f|^2(\varepsilon_\pi^2-m_\pi^2)^{3/2}d\varepsilon_\pi.$$

ここでエネルギー ε_π はつぎの区間の値をとる．

---

1) 崩壊 $K\to\pi+\mu+\nu$ に対しては同様な省略は不十分であり，振幅のなかに二つの独立な形状因子が残る．

$$m_\pi \leqslant \varepsilon_\pi \leqslant \frac{m_K^2+m_\pi^2}{2m_K}.$$

上限は e と ν が同じ側に跳び出す場合に対応する（電子の質量はいつでも無視される！）．f は $q^2=(p_e+p_\nu)^2$ あるいは同じことだが ε_π の関数であることを思い起こそう（$q^2=(p_K-p_\pi)^2=m_K^2+m_\pi^2-2m_K\varepsilon_\pi$ であるから）．もしもこの依存性を無視すれば，全崩壊確率は

$$w\approx\frac{G^2|f|^2m_K^2}{768\pi^3}\left(1-8\frac{m_\pi^2}{m_K^2}\right)$$

である．

3. 同じ崩壊に対し，エネルギー ε_π が与えられたときの電子のスペクトルを見いだせ．

解 (2) のなかで 4－運動量の積を展開して，(1) に代入し，d^3p_ν についての積分を行なって

$$dw=\frac{G^2|f|^2}{(2\pi)^5}m_K(\varepsilon_e\varepsilon_\nu+\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_\nu)\delta(\varepsilon_e+\varepsilon_\nu+\varepsilon_\pi-m_K)\frac{d^3p_e\,d^3p_\nu}{\varepsilon_e\varepsilon_\pi\varepsilon_\nu}$$

を得る．等式 $\boldsymbol{p}_e+\boldsymbol{p}_\nu=-\boldsymbol{p}_\pi$ から

$$\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_\nu=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{p}_\pi^2-\varepsilon_e^2-(m_K-\varepsilon_\pi-\varepsilon_e)^2\},$$

$$\varepsilon_e\varepsilon_\nu+\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_\nu=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{p}_\pi^2-(m_K-\varepsilon_\pi-2\varepsilon_e)^2\}.$$

$\boldsymbol{p}_e$ および $\boldsymbol{p}_\pi$ の方向についての積分は，つぎの積分にまとめられる．

$$\int\delta\left(\varepsilon_e+\varepsilon_\pi+\sqrt{\boldsymbol{p}_e^2+\boldsymbol{p}_\pi^2+2|\boldsymbol{p}_e||\boldsymbol{p}_\pi|\cos\theta}-m_K\right)d\cos\theta=\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_e|\boldsymbol{p}_\pi|}$$

（θ は $\boldsymbol{p}_e$ と $\boldsymbol{p}_\pi$ のあいだの角である）．最終的には

$$dw=\frac{G^2|f|^2m_K}{8\pi^3}[\boldsymbol{p}_\pi^2-(m_K-\varepsilon_\pi-2\varepsilon_e)^2]d\varepsilon_\pi\,d\varepsilon_e$$

となる．エネルギー ε_e は ε_π が与えられたとき限界

$$\frac{1}{2}(m_K-\varepsilon_\pi-|\boldsymbol{p}_\pi|)\leqslant\varepsilon_e\leqslant\frac{1}{2}(m_K-\varepsilon_\pi+|\boldsymbol{p}_\pi|)$$

のあいだを変化する．

§149. 形状因子の実数性

遷移行列要素 M_{fi} (148.1) は，摂動論の（弱い相互作用についての）1次近似に対応する．したがって，行列 M_{fi} はエルミートである．すなわち $M_{fi}^*=M_{if}$ である．これ

は，(148.1) に現われる遷移カレントに対する複素共役は逆遷移のカレントに変えることを意味する．

中性子の β-崩壊 (148.7) に対しては

$$\langle e|j_w|\nu\rangle^* = \langle \nu|j_w|e\rangle, \quad \langle p|J_w|n\rangle^* = \langle n|J_w|p\rangle \tag{149.1}$$

である．レプトン遷移カレントはつぎの式で与えられる．

$$\langle e|j_w|\nu\rangle = \bar{u}_e O u_\nu, \quad \langle \nu|j_w|e\rangle = \bar{u}_\nu O u_e.$$

これに対しては (149.1) の関係式が自動的に満足される．$\langle p|J|n\rangle = \langle \bar{u}_p \Gamma u_n\rangle$ の形に書かれたハドロン遷移カレントに対しては

$$\langle n|J_w|p\rangle = (\bar{u}_p \Gamma u_n)^* = \bar{u}_n \bar{\Gamma} u_p, \quad \bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^+ \gamma^0$$

を得る．(148.8) からの行列 Γ を使って

$$\langle n|J_w^\alpha|p\rangle = \bar{u}_n(f_1^*\gamma^\alpha - f_2^*\sigma^{\alpha\beta}q_\beta + f_3^*q^\alpha)u_p + \bar{u}_n(g_1^*\gamma^\alpha - g_2^*P^\alpha - g_3q^\alpha)\gamma^5 u_p \tag{149.2}$$

となる．このようにして逆遷移 ($p \to n$) のカレントは複素共役の形状因子 f^*, g^* を使って表わされる．しかしながら，ある過程およびその逆過程は別なので，これからはまだ，形状因子自体についての何らかの結論を下すことはできない[1]．

しかしながら，もしもこれに加えて，相互作用の CP-不変性（あるいは同じことだが T-不変性）を要求するならば，一定の結論を下すことができる[2]．この条件を (M_{fi} のエルミート性の条件とともに) ϕ-演算子を使って定式化しよう．

1次の摂動論が問題になっているという事実は，遷移振幅 M_{fi} および M_{fi} は，同一のエルミート演算子，すなわち相互作用の有効ハミルトニアンの行列要素でなければならないことを意味している．もしも遷移カレント $\langle e|j_w|\nu\rangle$ が演算子 $\mathrm{j}_w = \bar{\phi}_e O \phi_\nu$ の $\langle p|J_w|n\rangle$ がある演算子 J_w^+ の行列要素であるとすれば，逆遷移のカレントは演算子 j_w^+ および J_w の行列要素で，ハミルトニアンはこれらの積を両方とも含まなければならない．すなわち

---

1) 電磁遷移カレントに対しては M_{fi} のエルミート性から形状因子の実数性が出てきた (§113, §139)．これは粒子の変化がなく，したがってその始めと終りの状態の違いがその 4-運動量だけであるような（光子放出を伴う）遷移についての話であったことと関係があった．

2) 誤解を避けるために，遷移振幅に対して T-不変性はある過程および逆過程ではなく，ある過程および《時間反転された》過程の同等性を意味することを思い起こそう．あとの過程は《逆》過程とつぎの点が違っている．すなわち，始めと終りの状態の交換とともに，4-運動量 $p = (\varepsilon, \boldsymbol{p})$ もまた《時間反転された》値 $p^T = (\varepsilon, -\boldsymbol{p})$ に置き換えられることである．

$$\mathrm{H}_w = \frac{G}{\sqrt{2}}(\mathrm{j}_w \mathrm{J}_w^+ + \mathrm{j}_w^+ \mathrm{J}_w). \tag{149.3}$$

レプトンカレントの演算子は CP-変換のとき

$$(\mathrm{j}_w^0, \mathbf{j}_w)^{CP} = (-\mathrm{j}_w^{0+}, \mathbf{j}_w^+)$$

になる ((145.15) 参照). もしもハドロンカレントに対して

$$(\mathrm{J}_w^0, \mathbf{J}_w)^{CP} = (-\mathrm{J}_w^{0+}, \mathbf{J}_w^+) \tag{149.4}$$

ならば，ハミルトニアン (149.3) は CP-不変になるはずである．このときすべての形状因子が実数になることを示そう．

遷移カレント (148.8) にはつぎの演算子があてられる[1]．

$$\mathrm{J}_w^{\alpha+} = f_1(\bar{\phi}_p \gamma^\alpha \phi_n) + f_2(\mathrm{p}_p^* - \mathrm{p}_n)_\beta (\bar{\phi}_p \sigma^{\alpha\beta} \phi_n) + f_3(\mathrm{p}_p^* - \mathrm{p}_n)^\alpha (\bar{\phi}_p \phi_n)$$
$$+ g_1(\bar{\phi}_p \gamma^\alpha \gamma^5 \phi_n) + g_2(\mathrm{p}_p^* + \mathrm{p}_n)^\alpha (\bar{\phi}_p \gamma^5 \phi_n) + g_3(\mathrm{p}_p^* - \mathrm{p}_n)^\alpha (\bar{\phi}_p \gamma^5 \phi_n). \tag{149.5}$$

ここで $\mathrm{p} = i\partial$, $\mathrm{p}^* = -i\partial$ である．これらの演算子の添字 n および p は，微分がそれぞれ $\phi_n(x)$ および $\phi_p(x)$ のなかの引数 x について行なわれることを示している．荷電共役に対して ϕ-演算子の双1次形式は (28.4) にしたがって変換される．これらの変換には演算子 p_n および p_p は関係しない．しかしながら，恒等的な置換 $\mathrm{p}_p^* - \mathrm{p}_n = -(\mathrm{p}_p - \mathrm{p}_n^*)$ をする．このとき

$$(\mathrm{J}^{\alpha+})^C = -f_1(\bar{\phi}_n \gamma^\alpha \phi_p) - f_2(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)_\beta (\bar{\phi}_n \sigma^{\alpha\beta} \phi_p) + f_3(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \phi_p)$$
$$+ g_1(\bar{\phi}_n \gamma^\alpha \gamma^5 \phi_p) - g_2(\mathrm{p}_n^* + \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \gamma^5 \phi_p) + g_3(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \gamma^5 \phi_p) \tag{149.6}$$

である．反転 (P) の際に始めの3項は真正 4-ベクトル ($V^0, \boldsymbol{V} \to V^0, -\boldsymbol{V}$) のように，またつぎの3項は擬ベクトル ($A^0, \boldsymbol{A} \to -A^0, \boldsymbol{A}$) のように変換される．この結果は演算子 (149.5) にエルミート共役な式と，すなわち

$$\mathrm{J}^\alpha = f_1^*(\bar{\phi}_n \gamma^\alpha \phi_p) + f_2^*(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)_\beta (\bar{\phi}_n \sigma^{\alpha\beta} \phi_p) - f_3^*(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \phi_p)$$
$$+ g_1^*(\bar{\phi}_n \gamma^\alpha \gamma^5 \phi_p) - g_2^*(\mathrm{p}_n^* + \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \gamma^5 \phi_p) + g_3^*(\mathrm{p}_n^* - \mathrm{p}_p)^\alpha (\bar{\phi}_n \gamma^5 \phi_p) \tag{149.7}$$

とくらべる必要がある．もしもすべての f および g が実数ならば，求める等式 (149.4) を得る．

同様な方法で (148.6) のなかの二つの形状因子 f_1 および f_2 が実数であることを示す

1) 明らかなことは，カレントの変換則は不変変数 q^2 の関数としての形状因子の関数形には依存してはいけないことである．この変換則を見いだすために，すべての f および g を定数とみなしてもよい．こうすれば対応する演算子をあらわな形に書くことが可能になる．もちろん，これらの演算子は非常に深い意味をもっているわけではない．

ことができる．しかしながら，これらの主張には若干の制限があることを指摘しよう．カレント (148.6) の時空間の性質は中間子の相対的な偶奇性に依存する．すなわち，偶奇性が正ならば真正 4－ベクトル，負ならば擬ベクトルである．これに依存して CP－不変性の要求は f および g を実数あるいは虚数にする．しかしながら，この差は何ら物理的結果には反映しない．カレントのなかの共通位相因子は $|M_{fi}|^2$ をつくるときに消えてしまうからである．このようにして，形状因子の相対的実数性を問題にした方がより正確である．

ふたたび，上述の結果は，摂動論の1次近似で成立する等式 $M^*_{fi}=M_{if}$ の使用に基礎を置いていることを思い起こそう．弱い相互作用についてはこの条件はいつも満足されている．すなわち，考察された崩壊はこの相互作用について1次の効果である．しかしながら，この条件は崩壊生成物間の他の相互作用によって破られる．われわれがいままで考察した崩壊では，終状態の相互作用はただ電磁的なものだけが可能であった．これは弱い相互作用にくらべて大きいけれど，それ自体は小さい．したがって，これを勘定に入れたとき，形状因子の比較的小さい虚数部が現われうるだけである[1]．

もちろん，CP－不変性は粒子と（すべての運動量 $\boldsymbol{p}$ と螺線度 λ の符号を変えた）反粒子の崩壊確率が等しい結果をもたらす．われわれは §72 で，粒子と反粒子の寿命（すなわち，そのすべての可能なチャネルへの全崩壊確率）は，CPT－不変性の要求から厳密に一致しなければならないことを見てきた．この要求は，弱い崩壊に対しては M_{fi} のエルミート性から，個々のチャネルでの粒子と反粒子の崩壊確率が等しい結果をもたらすことを主張できる．

運動量 $\boldsymbol{p}$ と螺線度 λ をもつ粒子 a が，運動量 $\boldsymbol{p}'$ 螺線度 λ' をもつ粒子 a' の組に崩壊するとしよう．CPT－不変性のために

$$\langle a',\boldsymbol{p}',\lambda'|M|a,\boldsymbol{p},\lambda\rangle=\langle\bar{a},\boldsymbol{p},-\lambda|M|\bar{a}',\boldsymbol{p}',-\lambda\rangle$$

である．ここで $\bar{a}$, $\bar{a}'$ は反粒子である．もしもこれに加えて $M^*_{fi}=M_{if}$ であれば，この等式は粒子 a および $\bar{a}$ の崩壊振幅を結びつける形に書き直すことができる．すなわち

$$\langle a',\boldsymbol{p}',\lambda'|M|a,\boldsymbol{p},\lambda\rangle=\langle\bar{a}',\boldsymbol{p}',-\lambda'|M|\bar{a},\boldsymbol{p},-\lambda\rangle^* \tag{149.8}$$

である．これから崩壊の微分確率が（a あるいは a' の静止系で）等しいことが出てくる．

---

1) しかしながら，大きい電荷をもつ原子核の β－崩壊ではこの効果は強められる．終状態に2個あるいはそれ以上の，強く相互作用をする粒子が生じるような非レプトン崩壊では事情は変わってくる．§153 参照．

すなわち

$$dw(a, \lambda \to a', \boldsymbol{p}', \lambda') = dw(\bar{a}, -\lambda \to \bar{a}', \boldsymbol{p}', -\lambda') \qquad (149.9)$$

である．跳び出す方向および偏りについて平均したあとで，これは全確率に対する同様な等式になる．また粒子の偏りのあいだの一定の関係も出てくる．

説明のためにつぎの崩壊を考えよう．

$$K^- \to \pi^0 + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \quad K^+ \to \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu.$$

全確率が等しいことを基に，CPT－不変性はどちらの場合もミューオンの偏りのあいだの等式 $\boldsymbol{\zeta}_{\mu^+} = -\boldsymbol{\zeta}_{\mu^-}$ を導いている．T－不変性の要求を付け加えると，ミューオンの $[\boldsymbol{p}_\pi \boldsymbol{p}_\mu]$ の方向の偏りの禁止が導かれる．

§150. ハドロンの弱いカレントのアイソスピンの性質

弱い相互作用の**普遍性**の仮説は，すべての粒子に対する弱い遷移カレントが，強い相互作用を《蔽断》したときに同じ形をもつべきであるという主張から成り立っている．首尾一貫した理論なしに，この主張の正確な意味を定式化するのは困難ではあるが，これからある具体的な結果を引き出すことはできる．

この関係で強い相互作用のアイソ対称性（この対称性を壊す電磁的効果を無視して）を使うことにより，一連の結果が得られる (S. Weinberg, 1958; T. D. Lee, C. N. Yang, 1962)．そうして，崩壊 $\Sigma^\pm \to \Lambda + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$ ではハイペロン Σ^+ および Σ^- は同じアイソ3重項（$T_3 = 1$ および $T_3 = -1$）に，また Λ はアイソ1重項に属する．アイソ空間で x^2－軸のまわりの 180° の回転はすべての T_3 の符号を変える．すなわち $\Sigma^+ \to \Sigma^-$, $\Lambda \to \Lambda$ である．遷移 $\Sigma^+ \to \Lambda$ および $\Sigma^- \to \Lambda$ の《裸の》弱いカレントは普遍的であるので，アイソ対称性のために

$$\langle \Lambda | J_w | \Sigma^+ \rangle = \langle \Lambda | J_w | \Sigma^- \rangle \qquad (150.1)$$

である．

アイソ2重項にも同じ回転をすると，中性子と陽子は互いに移りあう．したがって遷移カレント $\langle n | J_w | p \rangle$ は，すべての量（波動振幅 u および4－運動量 p）の添字 n と p を交換することによって，カレント $\langle p | J_w | n \rangle$ から得られる．このような置換を (148.8) に行なって

$$\langle n | J_w^\alpha | p \rangle = \bar{u}_n (f_1 \gamma^\alpha - f_2 \sigma^{\alpha\beta} q_\beta - f_3 q^\alpha) u_p + \bar{u}_n (g_1 \gamma^\alpha + g_2 P^\alpha - g_3 q^\alpha) \gamma^5 u_p$$

が得られる．ここで q は前と同様 $q = p_p - p_n$ で定義される．もしも f_1, f_2, g_1, g_3 が実

数で f_3, g_2 が虚数ならば，この式は (149.2) と一致する．しかしわれわれは，CP-不変性のために形状因子はすべて実数でなければならないことを見てきた．このようにしてアイソ対称性は

$$f_3 = g_2 = 0 \tag{150.2}$$

という結果を導く．

中性子と陽子を同一の粒子，すなわち核子の二つのアイソスピン状態とみなして，遷移カレント (148.8) を

$$\langle p|J_w^\alpha|n\rangle = \chi_2^* \bar{u}_2(f_1\gamma^\alpha + f_2\sigma^{\alpha\beta}q_\beta + f_3 q^\alpha)\mathrm{T}_- u_1\chi_1 + \chi_2^* \bar{u}_2(g_1\gamma^\alpha + g_2 P^\alpha + g_3 k^\alpha)\gamma^5 \mathrm{T}_- u_1 \chi_1 \tag{150.3}$$

の形に書く必要がある．このなかに演算子 $\mathrm{T}_- = \mathrm{T}_1 - i\mathrm{T}_2$ (132.5) が導入された．これは粒子のアイソスピン状態を決めるアイソスピノール χ に働く（逆遷移 $p \to n$ のカレントに対しては，T_- の代りに T_+ がこなければならないだろう）．このようにして，そのアイソスピンの性質については，核子の弱いカレントはアイソベクトルの成分でなければならない．

中性子と陽子の質量が近いために，中性子の β-崩壊の際に放出されるエネルギーは比較的に小さい．これとともに q^2 という量もまた小さい．$\sim q^2$ の項を無視して，われわれは (150.3) のなかのすべての係数 f, g (q^2 の関数) を，$q^2 = 0$ のときの値で置き換えることができる．

これと同じ精度で，陽子と中性子の電磁遷移カレントは，(139.8) にしたがって

$$\langle p|J^\alpha|p\rangle = \bar{u}_2\left[\gamma^\alpha - \frac{1.79}{2m_p}\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\right]u_1, \quad \langle n|J^\alpha|n\rangle = \bar{u}_2\frac{1.91}{2m_p}\sigma^{\alpha\beta}q_\beta u_1 \tag{150.4}$$

の形になる．ここで $u_1 = u(p_1)$, $u_2 = u(p_2)$, $q = p_2 - p_1$ であり，m_p は陽子の質量である．核子2重項で陽子はアイソスピンの投影 $T_3 = 1/2$，中性子は $T_3 = -1/2$ をもつことを思い起こし，二つの式を一緒につぎの形に書くことができる．

$$\langle N|J_\alpha|N\rangle = \frac{1}{2}\chi_2^*\bar{u}_2\left[\gamma^\alpha + \frac{0.12}{2m_p}\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\right]u_1\chi_1 + \frac{1}{2}\chi_2^*\bar{u}_2\left[\gamma^\alpha - \frac{3.70}{2m_p}\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\right]\mathrm{T}_3 u_1\chi_1 \tag{150.5}$$

ここで $\mathrm{T}_3 = \tau_3/2$ である．この式の第1項はアイソスカラーで第2項はアイソベクトルの成分である．

この第2項を遷移 $n \to p$ および $p \to n$ の弱いカレントの真正ベクトル (V) 部分 ((150.

3) の1行目) とくらべる．すなわち

$$\langle p|J_w^\alpha|n\rangle^V = \chi_2^* \bar{u}_2(f_1\gamma^\alpha + f_2\sigma^{\alpha\beta}q_\beta + f_3 q^\alpha)\mathrm{T}_- u_1\chi_1,$$
$$\langle n|J_w^\alpha|p\rangle^V = \chi_2^* \bar{u}_2(f_1\gamma^\alpha + f_2\sigma^{\alpha\beta}q_\beta + f_3 q^\alpha)\mathrm{T}_+ u_1\chi_1 \quad (150.6)$$

である．これら三つのカレントはその時空間の性質については同じである．しかしアイソ空間についてはアイソベクトルの異なる成分である．これらすべては，同一の《裸の》カレント

$$\chi_2^* \bar{u}_2 \gamma^\alpha \mathbf{T} u_1 \chi_1$$

から出ている．

これが同一のアイソベクトルの三つの成分であるという仮定は，自然に提案された（そして実験によって確かめられた）[1]．したがって

$$f_1 = 1, \quad f_2 = -\frac{3.70}{2m_p}, \quad f_3 = 0 \quad (150.7)$$

である．等式 $f_3 = 0$ はアイソ対称性の要求の結果としてすでに得られている．この等式のために，弱いカレントのベクトル部分は（電磁カレントとともに），4－ベクトル q に対して横波であること，すなわち保存されるものであることに注目しよう．

このようにして，中性子から陽子への遷移の弱いカレントの真正ベクトル部分は

$$\langle p|J_w^\alpha|n\rangle^V = \bar{u}_p\left(\gamma^\alpha - \frac{3.70}{2m_p}\sigma^{\alpha\beta}q_\beta\right)u_n \quad (150.8)$$

に等しい．

中間子のつぎのような崩壊の遷移カレントに対しても類似の結論を下すことができる．

$$\pi^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e). \quad (150.9)$$

中間子 π^+, π^0, π^- は一つのアイソ3重項の成分で，アイソスピンの投影 $T_3 = +1, 0, -1$ に対応する．対応するアイソスピン状態はつぎの成分をもつアイソベクトル $\boldsymbol{\chi}$ によって記述される（(16.21) 参照）．

$$\boldsymbol{\chi}^+ = -\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}^0 = i\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi}^- = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\\ 0\end{pmatrix}. \quad (150.10)$$

アイソスピン ($T=1$) の演算子のアイソベクトルに対する作用は式

$$(\mathrm{T}_i\boldsymbol{\chi})_k = -ie_{ikl}\boldsymbol{\chi}_l$$

---

1) この仮説はエス・エス・ゲルシュテインおよびヤ・ベ・ゼリドヴィチ (1955) およびファインマン，ゲルマン (1957) によって提案された．

で定義される ((16.19) 参照). これを使って

$$T_+|\pi^-\rangle = -\sqrt{2}|\pi^0\rangle, \quad T_-|\pi^+\rangle = -\sqrt{2}|\pi^0\rangle$$

であることがわかる. ここで $T_\pm = T_1 \pm iT_2$ である. したがって, 遷移 $\pi^\pm \to \pi^0$ の弱いカレント (148.6) はまとめてつぎの形に書くことができる.

$$\langle\pi^0|J^\alpha_w|\pi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1P^\alpha + f_2q^\alpha)\chi_2^* T_\mp \chi_1 \qquad (150.11)$$

((148.6) のなかの中間子の波動振幅は1に等しいと置かれる).

遷移 $\pi^\pm \to \pi^\pm$ の電磁カレントは対角演算子 T_3 を使ってつぎの形に書かれる ((139.5) 参照).

$$\langle\pi|J^\alpha|\pi\rangle = F(q^2)P^\alpha\chi^* T_3\chi \qquad (150.12)$$

真正中性の π^0 に対しては, このカレントは当然0になる. 同じ仮説にしたがって, カレント (150.11), (150.12) が同一のアイソベクトルの成分であると仮定しよう. ここでこのなかの係数を比較して

$$f_1(q^2) = \sqrt{2}F(q^2), \quad f_2(q^2) = 0 \qquad (150.13)$$

となる.

崩壊 (150.9) の際に放出されるエネルギーが小さいので, ここでは $F(q^2)$ を $F(0)=1$ に置き換えることが許される. このとき弱い遷移カレントは単に

$$\langle\pi^0|J^\alpha_w|\pi^\pm\rangle = \sqrt{2}(p_1^\alpha + p_2^\alpha) \qquad (150.14)$$

に等しい.

問　　題

$\pi^\pm \to \pi^0 + e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$ の全崩壊確率を求めよ.

解　崩壊の際放出されるエネルギーは $\Delta = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4.6\,\text{MeV} \ll m_\pi$ である. したがって π^+ の静止系では π^0 もまた静止していると考えてよい. ((150.14) からの中間子遷移カレントを使って) 崩壊振幅は

$$M_{fi} = G\bar{u}_e(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)(1+\gamma^5)u_\nu = 2m_\pi G\bar{u}_\nu\gamma^0(1+\gamma^5)u_e$$

である. 電子の偏りについて加えたあとでは

$$\sum_{\text{偏り}}|M_{fi}|^2 = 32m_\pi^2 G^2(\varepsilon_e\varepsilon_\nu + \boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_\nu)$$

である. $\boldsymbol{p}_e\boldsymbol{p}_\nu$ をもつ項は方向についての積分のときに消える. したがって, 全崩壊の確率は

$$w = \frac{1}{(2\pi)^5 \cdot 16} \int \frac{|M_{fi}|^2}{\varepsilon_\nu \varepsilon_e m_\pi^2} \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_\nu - p_e) d^3 p_\nu d^3 p_e d^3 p_\pi$$

$$= \frac{2G^2}{(2\pi)^5} \int \delta(\varepsilon_\nu + \varepsilon_e - \varDelta) d^3 p_e d^3 p_\nu$$

となる．$m_e \ll \varDelta$ と考えて，積分の際に電子の質量を無視した．すなわち $d^3 p_e \to 4\pi \varepsilon_e^2 d\varepsilon_e$ ($d^3 p_\nu \to 4\pi \varepsilon_\nu^2 d\varepsilon_\nu$ と同様である）とした．結果として

$$w = \frac{G^2 \varDelta^5}{30\pi^3}$$

を得る．

§151. 中性子の β-崩壊

中性子の崩壊確率を計算するとき，中性子のカレントのなかで $\sim q^2$ の大きさの項（すでに (150.8) で行なわれた）だけでなく，$\sim q$ の量も，十分な精度で無視することができる．弱い遷移カレント全体（ベクトル部と擬ベクトル部の和）に対して

$$\langle p | J_w^\alpha | n \rangle = \bar{u}_p \gamma^\alpha (1 + \alpha \gamma^5) u_n \tag{151.1}$$

になるはずである．ここで $\alpha = g_1(0)$（経験値は $\alpha = 1.2$ である）と置いた．(150.2) のために $g_2 = 0$ であることを思い起こそう[1]．

静止中性子の崩壊の際に放出されるエネルギーが小さいために ($\varDelta = m_n - m_p \approx 1.3$ MeV)，生成する陽子もまた静止していると考えてよい．このときこれらの波動振幅は（標準表示で）

$$u_p = \sqrt{2m_p} \begin{pmatrix} w_p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_n = \sqrt{2m_n} \begin{pmatrix} w_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形である．ここで w は1に規格化された非相対論的（2成分）スピノールである．(21.20) および (22.18) の行列 γ を直接に掛けて，核子の遷移カレントに対し

$$\langle p | J_w | n \rangle = 2\sqrt{m_p m_n} (w_p^* w_n, -\alpha w_p^* \boldsymbol{\sigma} w_n) \tag{151.2}$$

を得る．これとレプトン遷移カレントとの積は崩壊振幅

---

1) しかしながら，ミューオン捕獲の反応 ($\mu^- + p \to n + \nu_\mu$) の確率を計算するときには，核子カレントに対するこのような近似は不十分である．もしも中間子原子（$p\mu^-$ の水素類似系）のなかの実質的に静止した μ^- の捕獲を問題にするならば，$q^2 = (p_n - p_p)^2 \approx -m_\mu^\nu$ である．形状因子中の $\sim q^2$ の補正はまったく小さいけれども，カレント内の $\sim q$ の項はかなりの大きさである．したがって，(150.8) の二つの項とカレントの擬ベクトル部分の二つの項とが残されなければならない．

$$M_{fi}=\sqrt{2m_pm_n}\,G\{(w_p^*w_n)(\bar{u}_e\gamma^0(1+\gamma^5)u_\nu)+\alpha(w_p^*\boldsymbol{\sigma}w_n)(\bar{u}_e\boldsymbol{\gamma}(1+\gamma^5)u_\nu)\}$$

を与える[1].

振幅の平方は

$$\begin{aligned}|M_{fi}|^2=2m_pm_nG^2\cdot 2\{&\mathrm{Sp}(\rho_n\rho_p)\mathrm{Sp}[\rho_e\gamma^0\rho_\nu\gamma^0(1+\gamma^5)]\\&+\alpha^2\,\mathrm{Sp}(\rho_n\sigma_k\rho_p\sigma_i)\mathrm{Sp}[\rho_e\gamma^i\rho_\nu\gamma^k(1+\gamma^5)]\\&+\alpha\,\mathrm{Sp}(\rho_n\boldsymbol{\sigma}\rho_p)\mathrm{Sp}[\rho_e\gamma^0\rho_\nu\boldsymbol{\gamma}(1+\gamma^5)]\\&+\alpha\,\mathrm{Sp}(\rho_n\rho_p\boldsymbol{\sigma})\mathrm{Sp}[\rho_e\boldsymbol{\gamma}\rho_\nu\gamma^0(1+\gamma^5)]\}\end{aligned}\tag{151.3}$$

である（$i,k=x,y,z$ は3次元ベクトル添字である）.

密度行列 ρ_e および ρ_ν に対しては

$$\rho_e=\frac{1}{2}(\hat{p}_e+m_e)(1+\hat{a}_e\gamma^5),\quad \rho_\nu=\hat{p}_\nu$$

と置く必要がある．また ρ_n, ρ_p に対しては非相対論的な偏った密度行列

$$\rho_n=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_n),\quad \rho_p=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma\zeta}_p^{(d)})$$

である．はじめは電子と陽子の偏りには興味がないので，これについて加える．このとき (151.3) のなかにはつぎのような項が残る[2].

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{偏り}\\ e,p}}|M_{fi}|^2=4G^2m_pm_n\{&\mathrm{Sp}\,\hat{p}_e\gamma^0\hat{p}_\nu\gamma^0+\alpha^2\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}_e\boldsymbol{\gamma}\hat{p}_\nu\boldsymbol{\gamma}\\&+i\alpha^2(e_{lki}\zeta_{pl}^{(d)})\mathrm{Sp}\,\hat{p}_e\gamma^i\hat{p}_\nu\gamma^k\gamma^5+2\alpha\,\mathrm{Sp}\,\hat{p}_e\gamma^0\hat{p}_\nu(\boldsymbol{\zeta}_n\boldsymbol{\gamma})\}.\end{aligned}$$

跡の簡単な計算はつぎの結果をもたらす.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\text{偏り}\\ e,p}}|M_{fi}|^2=16m_p^2G^2\varepsilon_e\varepsilon_\nu\{&1+3\alpha^2-(\alpha^2-1)\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{v}_\nu\\&-2\alpha(\alpha-1)\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{\zeta}_n+2\alpha(\alpha+1)\boldsymbol{v}_\nu\boldsymbol{\zeta}_n\}.\end{aligned}\tag{151.4}$$

ここで $\boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{p}_e/\varepsilon_e$, $\boldsymbol{v}_\nu=\boldsymbol{p}_\nu/\varepsilon_\nu$ は e および ν の速度である（$|\boldsymbol{v}_\nu|=1$），$m_p\approx m_n$ は核子の質量である.

波括弧のなかの式は電子とニュートリノの角分布を決定する．偏りのない中性子の崩壊の際には，e と ν の方向のあいだの相関は因子

---

1) β-崩壊のデータから与えられた定数 G は，$G=1.41\cdot10^{-49}\,\mathrm{erg\cdot cm^3}$ である．すなわち，ミューオン崩壊のデータからの値 (145.14) よりいくぶん小さい．ハドロンに対する輻射補正の不定性のために，この差の原因が何であるかを言うことはむずかしい.

2) パウリ行列の積の跡に対するつぎの公式を思い起こそう.

$$\mathrm{Sp}\,\sigma_i=0,\quad \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\sigma_i\sigma_k=\delta_{ik},\quad \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l=ie_{ikl},$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\sigma_i\sigma_k\sigma_l\sigma_m=\delta_{ik}\delta_{lm}-\delta_{il}\delta_{km}+\delta_{im}\delta_{kl}.$$

$$1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{v}_\nu$$

で与えられる．偏った中性子の崩壊の際の電子の分布（ニュートリノの方向が任意のとき）は

$$1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{\zeta}_n$$

に比例する．ニュートリノに対する同様な分布は

$$1 + \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{1 + 3\alpha^2} \boldsymbol{v}_\nu \boldsymbol{\zeta}_n$$

に比例する．

ふたたび（§146と同様に），(151.4) のなかで $\boldsymbol{v}_e \boldsymbol{\zeta}_n$ あるいは $\boldsymbol{v}_\nu \boldsymbol{\zeta}_n$ を含む項は反転 ($\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\zeta} \to \boldsymbol{\zeta}$) の際に符号を変える．そしてこれらの存在は偶奇性非保存の結果であることを指摘しよう．また，(151.4) のなかに $\boldsymbol{\zeta}_n[\boldsymbol{v}_e \boldsymbol{v}_\nu]$ の形の項がないことは，T-不変性の結果であることも示そう．すなわち，このような項は置き換え

$$\boldsymbol{\zeta}_n \to -\boldsymbol{\zeta}_n, \quad \boldsymbol{v}_e \to -\boldsymbol{v}_e, \quad \boldsymbol{v}_\nu \to -\boldsymbol{v}_\nu$$

に際して符号を変える（(146.11) 参照）．

$\boldsymbol{v}_e$ および $\boldsymbol{v}_\nu$ の方向について平均したあとで，(151.4) は

$$16m^2 G^2 (1 + 3\alpha^2) \varepsilon_e \varepsilon_\nu \tag{151.5}$$

に等しくなる．微分崩壊確率は

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{|M_{fi}|^2}{2m} \delta^{(4)}(p_n - p_p - p_\nu - p_e) \frac{d^3 p_p}{2m} \frac{d^3 p_e}{2\varepsilon_e} \frac{d^3 p_\nu}{2\varepsilon_\nu}$$

である．$d^3 p_p d^3 p_\nu$ について，および $\boldsymbol{p}_e$ の方向についての積分のあとで，これは電子のエネルギー分布を与え[1]，

$$dw = \frac{G^2}{2\pi^3}(1 + 3\alpha^2)\sqrt{\varepsilon_e^2 - m_e^2}\,(\Delta - \varepsilon_e)^2 \varepsilon_e \, d\varepsilon_e \tag{151.6}$$

である．$m_e \leqslant \varepsilon_e \leqslant \Delta$ の区間の積分は，崩壊の全確率を与える．

$$w = C \frac{G^2 \Delta^5}{60\pi^3}(1 + 3\alpha^2). \tag{151.7}$$

ここで

$$C = \frac{1}{60}\left(2\frac{\Delta^4}{m_e^4} - 9\frac{\Delta^2}{m_e^2} - 8\right) + \frac{\Delta}{4m_e} \operatorname{Arch} \frac{\Delta}{m_e} = 0.47$$

1) β-電子に対する同様な分布は最初にフェルミによって与えられた (1934).

である．

崩壊の際に跳び出す電子の偏りを計算するために，すべての計算をふたたび繰り返す必要はない．電子が偏っているときは (151.3) のなかのレプトンの跡は 4-ベクトル p_e および a_e が $p_e - m_e a_e$ の組み合わせでのみ含まれることに気がつけば十分である（§146 参照，ここではこのような形の跡が計算されている）．したがって (151.4) でつぎの置き換え

$$\varepsilon_e \longrightarrow \varepsilon_e - m_e a_e^0 = \varepsilon_e - \boldsymbol{p}_e \boldsymbol{\zeta}_e^{(d)} = \varepsilon_e(1 - \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{\zeta}^{(d)}),$$
$$\boldsymbol{p}_e \longrightarrow \boldsymbol{p}_e - m_e \boldsymbol{\zeta}_e^{(d)} - \frac{\boldsymbol{p}_e(\boldsymbol{p}_e \boldsymbol{\zeta}_e^{(d)})}{m_e + \varepsilon_e} \tag{151.8}$$

をして，電子の偏り $\boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}$ が与えられたときの崩壊確率を得る．

偏らない中性子に対しては $\boldsymbol{v}_\nu$ の方向について平均したあとで (151.4) は (151.5) になり，ε_e だけを含む．上記の置き換えを行なって，崩壊確率が

$$1 - \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{\zeta}_e^{(d)}$$

に比例することが見いだされる．これは電子の偏りが

$$\boldsymbol{\zeta}_e = -\boldsymbol{v}_e \tag{151.9}$$

であることを意味する（Л. Д. Ландау, 1957）．

問　　題

1. 方向 $\boldsymbol{v}_\nu$ が与えられたとき，偏らない中性子の崩壊の際の電子の偏りを決定せよ．

解 (151.4) で（$\boldsymbol{\zeta}_n = 0$ として）置き換え (151.8) を行なって

$$\left[1 - \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} v_e (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{n}_\nu)\right] \boldsymbol{\zeta}_e = \left[- v_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{n}_\nu)\right] \boldsymbol{n}_e + \frac{\alpha^2 - 1}{1 + 3\alpha^2} \frac{m_e}{\varepsilon_e} (\boldsymbol{n}_\nu - \boldsymbol{n}_e (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{n}_\nu))$$

を得る．ここで $\boldsymbol{n}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu$，$\boldsymbol{n}_e = \boldsymbol{v}_e / v_e$ である．

2. $\boldsymbol{v}_\nu$ の方向が任意のとき偏った中性子の崩壊の際の電子の偏りを決定せよ．

解 同じ方法で

$$\left[1 - \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} v_e (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{\zeta}_n)\right] \boldsymbol{\zeta}_e = \left[- v_e + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{\zeta}_n)\right] \boldsymbol{n}_e + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{1 + 3\alpha^2} \frac{m_e}{\varepsilon_e} (\boldsymbol{\zeta}_n - \boldsymbol{n}_e (\boldsymbol{n}_e \boldsymbol{\zeta}_n))$$

を得る．

3. $\boldsymbol{v}_\nu$ の値が任意のとき偏らない中性子崩壊の際の反跳陽子の偏りを決定せよ．

解 陽子の偏り $\boldsymbol{\zeta}_p^{(d)}$ が与えられたとき，電子および中性子の偏りについて加え，$\boldsymbol{v}_\nu$ の方向について平均したあとで，(151.4) のなかの波括弧の代りに

$$\{1+3\alpha^2+2\alpha(\alpha+1)\boldsymbol{v}_e\boldsymbol{\zeta}_p^{(d)}\}$$

を得る．これから

$$\boldsymbol{\zeta}_p=\frac{2\alpha(\alpha+1)}{1+3\alpha^2}\boldsymbol{v}_e$$

である．

§152. 超多重項内の遷移カレント

もっとひろいユニタリー群 $SU(3)$ についての強い相互作用の対称性を仮定すれば，ハドロンの弱いカレントについてこれ以上の結論を下すことができる (N. Cabibbo, 1963).

同一の超多重項に属する二つのハドロン状態間の遷移カレントを考察しよう．最も簡単な超多重項は仮説の基本粒子，すなわちクォークの超3重項である．これらのあいだの弱い遷移は，遷移

$$Q_n\to Q_p,\quad Q_\Lambda\to Q_p \tag{152.1}$$

(およびその逆) に対応することは明らかである．このとき粒子の電荷は変わる．実際に，ハドロン遷移カレントは (対応するレプトンの因子とともに) ハドロンのレプトン崩壊，すなわち他のハドロンとレプトンへの崩壊の確率振幅を決定する．このような崩壊でレプトンは一定の電荷 (±1) を運び去り，したがってハドロンの電荷も変わらなければならない．

三つのクォーク Q_p, Q_n, Q_Λ はつぎの成分をもつ超スピノール $\boldsymbol{\psi}^\alpha$ に対応する．

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

遷移 (152.1) は，超スピノール添字に対する作用が $2\to1$ あるいは $3\to1$ の置き換えからなるような演算子によって起こされる．すなわちこれらは §138 で定義された行列 λ_1^2 あるいは λ_1^3 で与えられる．逆の遷移は転置行列 $-\lambda_2^1$ あるいは λ_3^1 に対応する．これらの行列はすべて2階の行列超スピノール λ_b^a の成分であることを思い起こそう．

一般にすべての超多重項内の遷移カレントは，ある超スピノールのこのような成分であ

る．すなわち

$$(J_w)_{fi} \equiv \langle h_f | J_w | h_i \rangle = \alpha(\mathrm{O}_1^2)_{fi} \qquad \text{あるいは} \qquad (J_w)_{fi} = \beta(\mathrm{O}_1^3)_{fi}$$

の形をもつとするのが自然である．複素共役な式は逆遷移（あるいは粒子と反粒子とを置き換えた正遷移）のカレントを与える．これらは超スピノールの $\frac{1}{2}$－および $\frac{1}{3}$－成分である．

もしも相互作用に CP－不変性を要求すれば，比 α/β は実数でなければならない（§149参照）．そのあとで共通の規格化は任意であるから，$\alpha=1$ と置き β は $\beta=\tan\vartheta$ の形に書こう．ここで ϑ は実パラメータである（カビッボ角）．簡潔にするために，遷移カレントを和

$$(J_w)_{fi} = (\mathrm{O}_1^2)_{fi} + \mathrm{tg}\,\vartheta(\mathrm{O}_1^3)_{fi} \tag{152.2}$$

の形に書こう（もちろん具体的な遷移のおのおのに対しては，実際にはどちらかの項が 0 と異なるわけである）．

遷移 $Q_n \to Q_p$ のとき電荷 Z は 1 だけ変わり，ハイパーチャージ Y は変わらず，アイソスピンの投影 T_3 は 1 だけ変わる．(152.2) の第 1 項で記述される遷移は一般にすべて同様な性質をもっている．O_1^2 の形の演算子は粒子の超スピノール波動関数でその一つの添字に置き換え $2\to1$ を起こすからである．このときアイソスピンの変化は 0 あるいは ±1 である．

遷移 $Q_\Lambda \to Q_p$ のときは，電荷 Z とともにハイパーチャージも同様な変化を受ける．しかしアイソスピンは 1/2 だけ変わる．このようにして (152.2) の第 2 項はハイパーチャージの変化（あるいは同じことだが奇妙さ $S=Y-B$ の変化，なぜかというとバリオン数 B は不変だから）を伴う遷移に対応する．これと一緒に，われわれはハイパーチャージの変化を伴う弱い遷移のときの，つぎのような選択則に到達する[1]．

$$\Delta Y = \Delta Z = \pm 1, \tag{152.3}$$

$$|\Delta T| = 1/2. \tag{152.4}$$

ハイパーチャージは強い相互作用でも，電磁相互作用でも保存されるので，選択則(152.3) はただ弱い相互作用についてのより高次（1 次より）の近似で破られることを予想して

1) したがって $\Xi^- \to n + e^- + \bar{\nu}_e$ は禁止される．ここでは $\Delta Y=2,\ \Delta Z=1$ である．崩壊

$$\Sigma^- \to n + l^- + \nu_l, \quad K^0 \to \pi^- + l^+ + \nu_l$$

は許されるが

$$\Sigma^+ \to n + l^+ + \nu_l, \quad \bar{K}^0 \to \pi^- + l^+ + \nu_l \qquad (l = e \text{ または } \mu)$$

は禁止される（$\Delta Z = -1,\ \Delta Y = 1$）．

よい．アイソスピンは強い相互作用で保存されるが，電磁相互作用では保存されない．したがって，選択則（152.4）は電磁的効果ですでに破られることを予想してよい．

ハドロンのレプトン崩壊の最も簡単な例は，崩壊

$$K^{\pm} \to l^{+} + \nu_l(\bar{\nu}_l), \quad \pi^{\pm} \to l^{\pm} + \nu_l(\bar{\nu}_l)$$

である（$l = e$ あるいは μ）．ここでは中間子は消失する．これらのなかの1番目はハイパーチャージの変化を伴う遷移で，2番目は伴わない遷移である．二つの中間子は同じ8重項に属し，その超スピノール波動関数の一つの添字（2あるいは3に等しい）の値で区別される（(137.11）参照)．したがって

$$\langle 0|O^3_1|K^-\rangle = \langle 0|O^2_1|\pi^-\rangle$$

である（K^+ および π^+ に対しては O^3_1，O^2_1 の代りに O^1_3，O^1_2 と書く必要がある)．これから

$$\langle 0|J_w|K^{\pm}\rangle = \mathrm{tg}\,\vartheta\,\langle 0|J_w|\pi^{\pm}\rangle \tag{152.5}$$

となる．

超多重項の成分間の遷移カレントに対するあらわな式を書こう．（138.3）にしたがって演算子 O^2_1 および O^3_1 の，それの粒子の超スピノール波動関数に対する作用の一般形は

$$(O^2_1)^{\alpha} = f^{\alpha}\Lambda^2_1 + g^{\alpha}\bar{\Lambda}^2_1, \quad (O^3_1)^{\alpha} = f^{\alpha}\Lambda^3_1 + g^{\alpha}\bar{\Lambda}^3_1 \tag{152.6}$$

である．4－ベクトル添字 α は，遷移カレントはその時空間の性質からは4－ベクトルであることを思い起こさせる．このときカレント（これとともに4－ベクトル f^{α} および g^{α}）は真正ベクトル部分も擬ベクトル部分も含んでいてよい．

超多重項の成分の質量が比較的近いので，これらのあいだの遷移カレントではレプトンに与えられる4－運動量は1次近似で $q = 0$ と置くことができる．ちょうどアイソ多重項内の遷移に対してすでにやってきたのと同様である．

初めにカレントの真正ベクトル部分を考察しよう．$q = 0$ のとき真正4－ベクトルは（崩壊粒子の静止系で）ただ時間成分（3次元スカラー）だけをもつことができる．それは単に，$q = 0$ のときは遷移を特徴づけるいかなる3次元極性ベクトルもわれわれの手元にはないというだけの理由からである．演算子（152.6）の時間成分に含まれる（$q = 0$ のときの）係数 f^0 および g^0 はつぎのようにして決めることができる．それには弱いカレントと電磁的カレントのあいだの関係についての仮説として，アイソ対称性に対して§150で定式化された一般的な仮説をとればよい．

§144では，対称性の群 $SU(3)$ について電磁遷移カレントは超スピノールの $^1_1$－成分で

あることが示された．$q\to 0$ のとき，このカレントの0と異なる唯一の時間成分は粒子の電荷になり，それの演算子は

$$\mathrm{O}^1_1 = Z = \Lambda^1_1 - \overline{\Lambda}^1_1 \tag{152.7}$$

である．もしも，O^1_1，O^2_1，O^3_1 は同じ超スピノール演算子の成分とすれば，(152.7) と (152.6) の係数の比較は，$f^0=-g^0=1$ を与える．このようにして，弱い遷移カレントの時間成分は

$$(J^0_w)_{fi} = \{(\Lambda^2_1 - \overline{\Lambda}^2_1)_{fi} + \mathrm{tg}\,\vartheta(\Lambda^3_1 - \overline{\Lambda}^3_1)_{fi}\}(u^*_f u_i) \tag{152.8}$$

である．ここで始めと終りの粒子の波動関数の積は分離されている．中間子（スピン0）に対しては，$u_i=u_f=1$ と置くことができる．動かないバリオン（スピン 1/2）に対しては，u_i および u_f は3次元スピノール w_i および w_f になり，$u\to\sqrt{2m}w$ である．

さらに，カレントの擬ベクトル部分を考察しよう．$q\to 0$ の極限ではただ空間成分だけをもち，3次元軸性ベクトル $(\boldsymbol{J}_w)_{fi}$ から成っている．これはスピンをもつ粒子（これをスピン 1/2 としよう）に対してのみ存在しうる．実際に，スピン 1/2 をもつ二つの静止粒子のあいだの遷移に対しては，特性3次元軸性ベクトル

$$\boldsymbol{\sigma}_{fi} = w^*_f \boldsymbol{\sigma} w_i \tag{152.9}$$

をつくることができる．4-擬ベクトルの時間成分は3次元擬スカラーである．$\boldsymbol{q}=0$ であるから，われわれの手元には，軸性ベクトル (152.9) とともに擬スカラーをつくるべき極性ベクトルはない．

このようにして，カレントの空間成分は

$$(\boldsymbol{J}_w)_{fi} = \boldsymbol{\sigma}_{fi}\{[f(\Lambda^2_1)_{fi} + g(\overline{\Lambda}^2_1)_{fi}] + \mathrm{tg}\,\vartheta[f(\Lambda^3_1)_{fi} + g(\overline{\Lambda}^3_1)_{fi}]\}$$

である．ここで $\boldsymbol{f}_{fi} = f\boldsymbol{\sigma}_{fi}$，$\boldsymbol{g}_{fi} = g\boldsymbol{\sigma}_{fi}$ と置いた．係数 f および g は ϑ とともに現象論的パラメータのままである．

問　題

中間子超8重項のなかの弱い遷移カレントを求めよ．

解　2中間子間の遷移カレントは真正 4-ベクトルであり，したがって $\boldsymbol{q}=0$ のときは時間成分だけをもつ．超スピノール演算子の非対角要素は，§138 で計算されたのと同様に計算される．(152.8) から

$$(J^0_w)_{fi} = \{(\bar{\varphi}_f)^c_b(\lambda^2_1)^b_a(\varphi_i)^a_c - (\bar{\varphi}_f)^b_c(\lambda^2_1)^a_b(\varphi_i)^c_a\}$$
$$+\,\mathrm{tg}\,\vartheta\{(\bar{\varphi}_f)^c_b(\lambda^3_1)^b_a(\varphi_i)^a_c - (\bar{\varphi}_f)^b_c(\lambda^3_1)^a_b(\varphi_i)^c_a\}$$

となる．この公式にしたがって

$$\langle \pi^0 | J_w^0 | \pi^- \rangle = \sqrt{2}, \quad \langle \pi^0 | J_w^0 | K^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \vartheta$$

となる．

§153. 非レプトン性崩壊振幅の運動学的構造

レプトンが参加しないで起こる弱い相互作用の過程に対しては，純運動学的考察から反応振幅の形についての非常に一般的な結論を下すことができる．この場合，振幅は二つの遷移振幅の積には分かれない．したがって，われわれの自由になる量から直接にスカラー量 (M_{fi}) をつくることが問題になる[1]．

ハイペロンのバリオンと中間子への2粒子性崩壊を考えよう．すなわち，$\Lambda^0 \to p + \pi^-$, $\Sigma^+ \to p + \pi^0$, $\Xi^0 \to \Lambda^0 + \pi^0$，その他である．はっきりさせるために崩壊

$$\Xi^- \longrightarrow \Lambda^0 + \pi^- \tag{153.1}$$

について述べよう．π－中間子の波動振幅は擬スカラー u_π である，また Ξ および Λ の振幅は双スピノールで，これを u_1 および u_2 で表わそう．これらの量と，一つの独立な4－運動量（たとえば，$p_\pi = p_1 - p_2$）から四つのスカラー

$$\bar{u}_2 u_1, \quad \bar{u}_2 \gamma^5 u, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi u_1, \quad \bar{u}_2 \hat{p}_\pi \gamma^5 u_1$$

をつくることができる．しかしながら，ディラック方程式 $(\bar{u}_1 \hat{p}_1 = m_1 u_1,\ \hat{p}_2 u_2 = m_2 u_2)$ を使ったあとでは，これらの内のあとの対は始めの対に一致してしまう．したがって，崩壊振幅の一般形は

$$M_{fi} = G(\bar{u}_2(f + g\gamma^5) u_1) u_\pi \tag{153.2}$$

である（因子 G は相互作用の大きさの程度を決める係数として導入された）．2粒子性崩壊のときには，すべての4－運動量のスカラー積は（粒子の質量を使って表わされた）定数にまとめられる．したがって，係数 f, g は定数になる．

(153.2) のなかの独立な係数の数 (2) は（崩壊粒子のスピンで決められる系の全角運動量 $J = 1/2$ の値が与えられたとき）崩壊の独立な螺線振幅の数に対応する．スピンの量子化の軸として，ハイペロンのとび去る方向 $\boldsymbol{n}$ を選ぼう．π のスピンは0であるから，Λ の螺線度（スピンの $\boldsymbol{n}$ への投影）は Ξ の螺線度と一致する．言いかえれば，つぎの二つの螺線振幅だけが0と異なる．

---

1) ここでは単にスカラーと言ったが，反転に対する一定の振舞いを考慮に入れているわけではない．

$$\langle 1/2\ 0|\mathrm{S}|1/2\rangle \equiv (a+b)/\sqrt{2}, \quad \langle -1/2\ 0|\mathrm{S}|-1/2\rangle \equiv (a-b)/\sqrt{2}. \tag{153.3}$$

空間偶奇性が保存されるならば，これら二つの振幅は符号だけが異なるはずである．(70.13) にしたがって

$$\left\langle \frac{1}{2}\middle|0\middle|\mathrm{S}\middle|\frac{1}{2}\right\rangle = \eta\left\langle -\frac{1}{2}0\middle|\mathrm{S}\middle|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

になるはずである．ここで $\eta = \eta_2\eta_\pi/\eta_1 = \pm 1$，そして η_1，η_2，η_π は粒子の内部偶奇性である（したがって，Ξ と Λ の相対内部偶奇性を正，π の内部偶奇性を負と仮定して $\eta = -1$ となる）．これに対応して，二つの量

$$\begin{aligned}\langle \Lambda\pi, s\,|\,S\,|\,\Xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left\langle\frac{1}{2}0\middle|\mathrm{S}\middle|\frac{1}{2}\right\rangle + \left\langle -\frac{1}{2}0\middle|\mathrm{S}\middle|-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \equiv a,\\ \langle \Lambda\pi, p\,|\,S\,|\,\Xi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left\langle\frac{1}{2}0\middle|\mathrm{S}\middle|\frac{1}{2}\right\rangle - \left\langle -\frac{1}{2}0\middle|\mathrm{S}\middle|-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \equiv b\end{aligned} \tag{153.4}$$

のなかの一つは偶奇性を保存する崩壊振幅（$\eta = -1$ なら b），他はそれを破る崩壊振幅（$\eta = -1$ なら a）である．η の値への依存性のほかに，振幅 a および b は，それぞれ正（s-波 $l = J - 1/2 = 0$）および負（p-波 $l = J + 1/2 = 1$）の軌道偶奇性をもつ状態にある $\Lambda + \pi$ 系を生成する崩壊振幅にも対応することは容易に考えられる．

いま考察されている崩壊に固有な特性は，終状態には二つの強く相互作用をする粒子が存在することである．この事情は，CP-(あるいは T-) 不変性の要求から崩壊振幅に課される条件を明らかにするときに重要である[1]．§149 ですでに，この場合に行列 M_{fi} がエルミートでありえないことが指摘された．いまは S-行列のユニタリー性の一般的性質だけを使うことができる．このときは反応および逆反応だけでなく，二つの終りの粒子間に起こりうる他の反応（弾性散乱）もまた考慮する必要がある[2]．

添字 0 で状態 $|\Xi\rangle$ を，また添字 1 および 2 で状態 $|\Lambda\pi, s\rangle$ および $|\Lambda\pi, p\rangle$ を表わそう．強い相互作用は空間偶奇性を保存するので，それは偶奇性の変化のない弾性散乱だけをもたらすことができる．偶奇性の変化を伴う散乱は崩壊 $\Xi \to \Lambda + \pi$ と同様に弱い相互作用の効果である．したがって，S-行列のすべての非対角要素 S_{ab} は，対角要素にくらべて小さい（$\sim G$ の比である）．

S-行列のユニタリー性の条件を書こう

$$\sum S_{ac}S_{bc}^{*} = \delta_{ab}.$$

---

1) (153.1) の形の崩壊に対して，CP-偶奇性の保存則の破れは現在のところ見つかっていない．
2) この問題に対する上述の扱いはフェルミによる (1953).

G についての1次の量までの精度で

$$S_{aa}S_{aa}^* = 1, \tag{153.5}$$

$$S_{aa}S_{ba}^* + S_{ab}S_{bb}^* = 0 \qquad (a \neq b) \tag{153.6}$$

である．(153.5) に対応して振幅 S_{aa} を

$$S_{aa} = e^{2i\delta_a} \tag{153.7}$$

の形に表わそう．ここで $\delta_0 = 0$ で，また $\delta_1 = \delta_s$，$\delta_2 = \delta_p$ は弾性 s－および p－散乱の位相である．ここで T－不変性の条件を考慮すると，$S_{ab} = S_{ba}$ となる．このとき (153.6) から，すべての S_{ab} に同一の符号（上あるいは下）をもった

$$S_{ab} = \pm |S_{ab}|\, ie^{i(\delta_a - \delta_b)}$$

を得る．種々の S_{ab} の相対的位相だけが物理的意味をもっている．したがって，共通因子は重要でない．われわれは特につぎのように書くことができる．

$$S_{10} \equiv a = |a|\, e^{i\delta_s}, \quad S_{20} \equiv b = |b|\, e^{i\delta_p}. \tag{153.8}$$

このようにして，崩壊振幅の位相は弾性散乱の位相と関係していることがわかる．

反応 (153.1) で発生する系 $\Lambda + \pi$ は，π のアイソスピンと一致する一定のアイソスピン $T = 1$ をもっている．この型の他の反応（たとえば $\Lambda^0 \to p + \pi^-$）では系 $N + \pi$ は $T = 1/2$ および $T = 3/2$ をもつアイソ状態になることができる．強い相互作用はアイソスピンを保存するので，結果 (153.8) はこの場合にも成立する．ここで $a = 1, 2$ は系 $N + \pi$ の一定の空間偶奇性および一定のアイソスピンをもつ状態の番号になっている．

最後に，ハイペロン崩壊の偏りと角相関を考えよう (T. D. Lee, C. N. Yang, 1957)．(153.3) からの記号 a および b を使って，S－行列（始めと終りのバリオンの螺線度の添字を使った行列）の崩壊の部分は，2次元の行列 $a \cdot 1 + b \cdot \sigma_z$ の形あるいは

$$\mathrm{S} = a \cdot 1 + b \cdot \boldsymbol{\sigma n} \tag{153.9}$$

の形に表わすことができる．

崩壊確率は，S－行列の要素の積を二つの粒子の偏りの状態について平均することによって得られ

$$w \propto \mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}\rho_1 \mathrm{S}^+ \rho_2) \tag{153.10}$$

となる．ここで ρ_1，ρ_2 は始めと終りのバリオンの偏りの密度行列である（§48，第1巻197頁脚注参照）．エネルギーと角運動量が一定で運動量が一定でない系の状態が考察されていることを思い起こそう．したがって，われわれの自由になる唯一のベクトルはバリオンの偏りのベクトル $\boldsymbol{\zeta}$ である．これを使ってつくられる2次元の密度行列はつぎの形だけ

が可能である.

$$\rho \backsim 1 + \boldsymbol{\sigma\zeta} \tag{153.11}$$

($\boldsymbol{\sigma\zeta}$ の係数の1は，平均値が $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\zeta}$ であるという要求によって決定された)[1]. (153.11) を (153.10) に代入して

$$w \backsim \mathrm{Sp}\,(a + b\boldsymbol{\sigma n})(1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{n})(a^* + b^*\boldsymbol{\sigma n})(1 + \boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}\boldsymbol{n})$$

を得る.

(255頁の脚注にある公式を使った) 跡の計算はつぎの結果へと導く.

$$\begin{aligned} w \backsim aa^*(1 + \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}) + bb^*[1 + 2(\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}] \\ + (a^*b + ab^*)(\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}\boldsymbol{n}) - i\,(ab^* - a^*b)(\boldsymbol{n}[\boldsymbol{\zeta}_1\boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}]). \end{aligned} \tag{153.12}$$

ここで $\boldsymbol{\zeta}_1$ は始めのバリオンの偏り，$\boldsymbol{\zeta}_2^{(d)}$ は測定器で分離された終りのバリオンの偏り，$\boldsymbol{n}$ はその運動方向である. 公式 (153.12) はそのなかにすべての偏りの効果を含んでいる. CP - 偶奇性が保存されるとき，(153.12) の最後の項は，a および b の位相 (153.8) が異なることを，すなわち終状態内の相互作用を考慮することによってのみ生じることを指摘しよう.

§154. 中性 K - 中間子

粒子と反粒子とが別のものであるためには，それらは何か独自の量子的指標によって互いに区別されなければならない. 既知の場合には唯一の例外を除いてすべて，これらの指標中に厳密に保存する加算量，すなわち電荷，あるいはバリオン数等がある. 言いかえれば，これは粒子と反粒子が互いに移りうるような相互作用がなく，あらゆる過程を通じてそのままの形でいることを意味している. 正確に言えば，粒子と反粒子の状態の重ね合わせの2個のどんな組をとってもこのような相互作用を対角化することはできない.

唯一の例外は中性 K- 中間子，すなわち K^0 と $\overline{K}_0$ とである. これらの粒子と反粒子は電荷もバリオン数ももたずに，ただハイパーチャージ ($Y=1$ および $Y=-1$) によって区別されるだけである. しかしハイパーチャージは厳密に保存する量ではない. すなわち，強い相互作用と電磁相互作用では保存しても，弱い相互作用では保存しない. したがって，K^0 と $\overline{K}^0$ のあいだの遷移は原理的に可能である.

状態 $|K^0\rangle$ および $|\overline{K}^0\rangle$ を決定しよう. そして CP - 変換の際に，これらが互いに移

1) 密度行列 (153.11) は今の場合，粒子に対して非相対論的近似が正しいことを暗に認めているものでないことを強調しよう！

りあうように位相を決めよう．すなわち

$$\mathrm{CP}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad \mathrm{CP}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle. \tag{154.1}$$

もちろん，互いに移りあうので，これらの状態は一定の CP－偶奇性をもたない．しかしながら，つぎの重ね合わせはそれをもっている．それは

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\}, \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle\} \tag{154.2}$$

である．

CP－偶奇性が厳密に保存するときは，状態（154.2）のあいだの遷移は禁止される．言いかえれば，これらの状態は全ハミルトニアンを対角化する．すなわち粒子 K_1^0 と K_2^0 とは一定の（相異なる）質量と寿命をもつはずである（M. Gell-Mann, A. Pais, 1955）．

特に，一定の CP－偶奇性をもつ系の発生へと導く崩壊には，K^0－中間子は K_1^0 および K_2^0 の形で現われるはずである．たとえば崩壊

$$K_1^0 \to \pi^+ + \pi^-, \quad K_1^0 \to \pi^0 + \pi^0, \quad K_2^0 = \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$$

がこれである[1]．

しかしながら，実際には K^0－中間子の崩壊では，CP－偶奇性の破れが観測される．もちろんこの破れの程度は小さいけれども[2]．CP－偶奇性の非保存は $CP = +1$ および -1 をもつ状態間の遷移の可能性をもたらしている．この結果，一定の質量と寿命をもつ状態（これを K_S^0 および K_L^0 と名付けよう）はもはや一定の CP－偶奇性をもつ状態（154.

---

1) $\pi^+ + \pi^-$ 系および $\pi^0 + \pi^0$ 系はいつも $CP = +1$ をもっている．第一の場合は，これはスピン 0 をもつ粒子－反粒子対の一般的性質である（§13 の問題参照），第二の場合には，$C = (+1)^2 = +1$，および $P = +1$ である．スピン 0 をもつ二つの同一粒子から成る系に対しては，反転は粒子の交換と同等で，波動関数の符号を変えないからである．

三つの擬スカラー粒子 π^0 に対しては，その内部偶奇性は P に因子 $(-1)^3 = -1$ をもち込む．軌道偶奇性は，系の全角運動量（崩壊粒子 K^0 のスピンと一致する．つまり 0 に等しい）をつくることにより見いだすことができる．これは $\pi^0 + \pi^0$ の対の相対角運動量 l_{12} と，第三の粒子のこの対に対する相対角運動量 l_3 とからつくる．軌道偶奇性は $(-1)^{l_{12}} = +1$ に等しいので，l_{12} は偶数である．総和が全角運動量 0 になるようにするために，角運動量 l_3 は l_{12} と一致しなければならない．これからその軌道偶奇性は $+1$ に等しく，したがって $P = (-1)(+1) = -1$ であることが出てくる．荷電偶奇性は $C = (+)^3 = +1$，したがって $CP = -1$ である．

2) すなわち，崩壊 $K_2^0 \to \pi^+ + \pi^-$ が観測される．しかしこの振幅と $K_1^0 \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊振幅の比は $\sim 2 \cdot 10^{-3}$ である．この量は，前と同様に，弱い相互作用における CP－偶奇性の非保存の程度を一般的に特徴づけている．

2) とは一致しないはずである[1].

K^0 - 中間子の任意の状態を重ね合わせ

$$a_1|K^0\rangle + a_2|\bar{K}^0\rangle \tag{154.3}$$

の形に表わそう. K^0 と $\bar{K}^0$ のあいだの相互遷移を考慮に入れた, この状態の時間変化を記述する方程式の一般形は

$$i\frac{da_i}{dt} = \Lambda_{ik}a_k \qquad (i, k = 1, 2) \tag{154.4}$$

である. 係数 Λ_{ik} は2行2列の行列であり, これは一般の場合にエルミート部分と反エルミート部分に分けることができる. あるいは同じことだがつぎの形に表わすことができる.

$$\Lambda_{ik} = M_{ik} - i\Gamma_{ik}. \tag{154.5}$$

ここで2個の行列, M_{ik} および Γ_{ik} はエルミートである. すなわち

$$M_{ik} = M_{ki}^*, \quad \Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}^*. \tag{154.6}$$

条件 (154.1) にしたがって, CP - 変換はこれらの行列の添字を $1\to 2$, $2\to 1$ と置き換える. 時間反転は始状態および終状態の行列添字を交換する. したがって, 普遍的な CPT - 不変性の要求はつぎの等式へと導く.

$$\mathrm{CPT}: \quad M_{11} = M_{22}, \quad \Gamma_{11} = \Gamma_{22}. \tag{154.7}$$

CP - 不変性の要求は, これに加えてさらに等式

$$\mathrm{CP}: \quad M_{12} = M_{21}, \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} \tag{154.8}$$

へと導くはずである. すなわち (154.6) にしたがって, M_{12} および Γ_{12} は実の量になるはずである.

定常状態に対しては (154.4) から方程式 $a_i\delta E = \Lambda_{ik}a_k$ が, そしてこれから固有値に対する永年方程式が得られる. すなわち

$$|\delta E\cdot\delta_{ik} - \Lambda_{ik}| = 0 \tag{154.9}$$

である. これは二つの複素根をもつ. これの実部は粒子 K_S^0 および K_L^0 の質量に対する補正を, 虚部はその減衰係数 (寿命の逆数) を与える. すなわち

---

1) 《短命の》(K_S^0) および《長命の》(K_L^0) K^0-中間子の寿命は 175 頁の表に載せてある. その質量の差は

$$m(K_L^0) - m(K_S^0) = 3.6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV} = 0.47\frac{\hbar}{\tau(K_S^0)}$$

である.

$$\delta E_S = \delta m_S - \frac{i}{2}\gamma_S = \Lambda_{11} + \sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{21}},$$
$$\delta E_L = \delta m_L - \frac{i}{2}\gamma_L = \Lambda_{11} - \sqrt{\Lambda_{12}\Lambda_{21}} \tag{154.10}$$

である．対応する状態は（規格化係数を除いて）重ね合わせ

$$|K_S^0\rangle = |K^0\rangle + \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}}|\bar{K}^0\rangle, \quad |K_L^0\rangle = |K^0\rangle - \sqrt{\frac{\Lambda_{21}}{\Lambda_{12}}}|\bar{K}^0\rangle \tag{154.11}$$

である．CP－偶奇性非保存の程度が小さい（差 $\Lambda_{12}-\Lambda_{21}$ が小さい）ときは，これらの状態はそれぞれ $|K_1^0\rangle$ および $|K_2^0\rangle$ に近い．

二つの異なる寿命が存在するので，K^0－中間子束のなかで粒子，反粒子数の振動が現われる．

$t=0$ という瞬間に，中間子が状態 $|K^0\rangle$ に見いだされたとする．

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|K_S^0\rangle + |K_L^0\rangle\}$$

と書く（ここでは K_S^0 および K_L^0 と，K_1^0 および K_2^0 との小さい差は無視する）と，t の瞬間には状態が

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|K_S^0\rangle e^{-im_S t-\frac{1}{2}\gamma_S t} + |K_L^0\rangle e^{-im_L-\frac{1}{2}\gamma_L t}\right\}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|K^0\rangle\left(e^{-im_S t-\frac{1}{2}\gamma_S t} + e^{-im_L t-\frac{1}{2}\gamma_L t}\right)\right.$$
$$\left. + |\bar{K}^0\rangle\left(e^{-im_S t-\frac{1}{2}\gamma_S t} - e^{-im_L t-\frac{1}{2}\gamma_L t}\right)\right\}$$

になることがわかる．$|K^0\rangle$ および $|\bar{K}^0\rangle$ の係数の絶対値の平方は，粒子がこれらの状態に見いだされる確率 w を与える．このようにして

$$\frac{w(K^0)-w(\bar{K}^0)}{w(K^0)+w(\bar{K}^0)} = \frac{2e^{-(\gamma_S+\gamma_L)t/2}\cos[(m_L-m_S)t]}{e^{-\gamma_S t}+e^{-\gamma_L t}} \tag{154.12}$$

が見いだされる．

もしも K^0－中間子について述べるならば，確率 w の代りに，そのなかの粒子と反粒子数の密度について述べればよい．このとき t は，K－中間子の静止系で測られた時間と考える必要がある．

第1巻への補遺

§82 a. 高速粒子の電離損失

原子の励起および電離を伴う，速い相対論的粒子と原子との衝突を考察しよう．非相対論的な場合には，このような非弾性衝突は，Ⅲ，§145，§146 で考察された．ここでは，そこで得られた公式の相対論的一般化が与えられる (H. A. Bethe, 1933)．

原子に入射する粒子の速度は原子内電子の速度にくらべて大きい（それにより，あらゆる場合に $Z\alpha \ll 1$，すなわち原子番号がそう大きくはないことを仮定する）．考察している問題へのボルン近似の適用可能性は，この条件によって保証される．速い粒子が軽い（電子，陽電子）か重い（中間子，陽子，α 粒子その他）かによって，問題の解が多少異なっている．

衝突前に原子が静止している実験室系で，速い粒子の始めと終りの運動量を $p=(\varepsilon, \boldsymbol{p})$ および $p'=(\varepsilon', \boldsymbol{p}')$ としよう．差 $q=p'-p$ は，粒子から原子に転移されるエネルギーおよび運動量を与える．可能な運動量転移の全積分を二つの領域に分ける．すなわち

$$\text{I)}\quad \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \ll m, \qquad \text{II)}\quad \frac{\boldsymbol{q}^2}{m} \gg I. \tag{82a.1}$$

ここで m は電子の質量，I はある平均原子エネルギー（原子の電離ポテンシャル）である．この二つの領域は，$I \ll \boldsymbol{q}^2/m \ll m$ で重なり合っている．この事情があるので，この領域のおのおのに対して得られた結果を，正確につなぎ合わせることができる．第1および第2の領域での $\boldsymbol{q}$ の値をそれぞれ，小さい運動量転移および大きい運動量転移ということにしよう．

A. 小さい運動量転移

この領域で原子内電子は，原子の始状態でも終状態でも非相対論的と考えることができる．

過程の振幅はつぎの式で与えられる．

$$M_{fi}^{(n)} = e^2 J_{n0}^{\mu}(-q) J_{p'p}^{\nu}(q) D_{\mu\nu}(q). \tag{82a.2}$$

ここで J_{n0} は原子の始状態 (0) から終状態 (n) への遷移 4－電流である．また $J_{p'p}$ は速い粒子の遷移 4－電流である．これらの電流はここでは，たとえば二つの《素》粒子，すなわち電子とミューオン (74.17) の散乱振幅のなかにあるはずの式 ($\bar{u}'\gamma u$) と入れ替わる ((140.3) もまた参照)．遷移電流は運動量表示にする ((43.11) 参照)．実験室系でのこの過程の断面積は

$$d\sigma_n = 2\pi\delta(\varepsilon - \varepsilon' - \omega_{n0})|M_{fi}^{(n)}|^2 \frac{d^3p'}{2|\boldsymbol{p}|2\varepsilon'(2\pi)^3} \tag{82a.3}$$

である．ここで $\omega_{n0} = E_n - E_0$ は原子状態間の遷移の振動数である．終状態は離散スペクトルでも連続スペクトルでもよい．1番目の場合は原子の励起に，2番目は電離に対応する．エネルギー保存則 ((82a.3) のなかの δ－関数で考慮されている) のなかで，原子の反跳エネルギーは無視された．これは運動量転移が小さいときにはもちろん許される．

光子伝播関数は与えられた場合にゲージ (77.14) をとるとつごうがよい．ここではその空間成分だけが0と異なる．すなわち

$$D_{ik}(q) = -\frac{4\pi}{\omega^2 - \boldsymbol{q}^2}\left(\delta_{ik} - \frac{q_i q_k}{\omega^2}\right). \tag{82a.4}$$

このとき，(82a.2) のなかの遷移 4－電流はその空間成分だけが必要である．

原子の遷移電流 $\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q})$ は与えられた場合に，普通の非相対論的な式

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{i}{2m}\int e^{-i\boldsymbol{qr}}(\psi_0\nabla\psi_n^* - \psi_n^*\nabla\psi_0)\,d^3x \tag{82a.5}$$

のフーリエ成分である．ここで ψ_0，ψ_n は原子の波動関数である (このとき書き方を簡単にするために，ここおよび以下で原子内電子についての和の記号は落とした．すなわち，あたかも原子内に唯一個の電子しかないとしたときのような公式を書いた)．第1項で部分積分を行ない，この式を行列要素の形の式に書き直すことができる．

$$\boldsymbol{J}_{n0}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}} + e^{-i\boldsymbol{qr}}\mathbf{v})_{n0}. \tag{82a.6}$$

ここで $\mathbf{v} = -(i/m)\nabla$ は電子の速度の演算子である．

散乱される粒子の遷移電流に関しては，それによって失う運動量が比較的小さいので ($|\boldsymbol{q}| \ll |\boldsymbol{p}|$)，それを単なる行列要素

$$\boldsymbol{J}_{pp}(0) = 2\boldsymbol{p}z \tag{82a.7}$$

に置きかえることができる．これは古典的直線運動に対応する ((96.5) 参照)．ここでまた因子 z が導入された．これは粒子の電荷 (ze) と電子の電荷との差を考慮したものであ

る．

$\boldsymbol{q}$ が小さいことはまた粒子の屈折角 ϑ が小さいことを意味する．このとき（$\boldsymbol{p}$ に対する）$\boldsymbol{q}$ の縦および横成分は

$$-q_{\parallel} \approx \frac{dp}{d\varepsilon}\omega_{n0} = \frac{\omega_{n0}}{v}, \quad q_{\perp} \approx |\boldsymbol{p}|\vartheta \qquad (82a.8)$$

に等しい．したがって $\boldsymbol{qp} \approx -\varepsilon\omega_{n0}$ である．

(82a.4)～(82a.8) を (82a.2) に代入すると

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{4\pi ze^2}{q^2}\left\langle n \left| \frac{\varepsilon}{\omega_{n0}}(\boldsymbol{q}\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}} + e^{-i\boldsymbol{qr}}\boldsymbol{q}\mathbf{v}) + (\boldsymbol{p}\mathbf{v}e^{-i\boldsymbol{qr}} + e^{-i\boldsymbol{qr}}\boldsymbol{p}\mathbf{v}) \right| 0 \right\rangle$$

となる．

第1項でつぎのことに注意しよう．それは

$$\boldsymbol{q}\mathbf{v}f + f\boldsymbol{q}\mathbf{v} = 2i\dot{\mathbf{f}}$$

である．ここで $f \equiv e^{-i\boldsymbol{qr}}$（III，669頁参照），したがってこの演算子の行列要素は行列要素 $2i(\dot{f})_{n0} = 2\omega_{n0}f_{n0}$ と一致する．第2項では，$\boldsymbol{q}$ が小さいので $e^{-i\boldsymbol{qr}}$ を1に置き換えれば十分である．このとき

$$M_{fi}^{(n)} = -\frac{8\pi ze^2}{q^2}\{\varepsilon(e^{-i\boldsymbol{qr}})_{n0} - i\boldsymbol{pr}_{n0}\omega_{n0}\}$$

である．この式の絶対値の2乗は

$$|M_{fi}^{(n)}|^2 = \frac{64\pi^2(ze^2)^2}{(q^2)^2}\{\varepsilon^2|(e^{-i\boldsymbol{qr}})_{n0}|^2 + 2(\boldsymbol{qr}_{n0})(\boldsymbol{pr}_{n0})\varepsilon\omega_{n0} + (\boldsymbol{pr}_{n0})^2\omega_{n0}^2\} \qquad (82a.9)$$

である（ここで第2項では $e^{-i\boldsymbol{qr}} \cong 1 - i\boldsymbol{qr}$ と置かれた．第1項では，先へいって明らかになる理由で，こう置いてはいけない．273頁脚注参照）．

その原子との非弾性散乱の結果として速い粒子のエネルギーの消失は

$$\kappa = \sum_n \int \omega_{n0}\,d\sigma_n = \frac{1}{16\pi^2}\sum_n \int \omega_{n0}|M_{fi}^{(n)}|^2\,do' \qquad (82a.10)$$

で決定される[1]，ここで和は可能なすべての原子の終状態について行なわれ，積分は散乱粒子の方向について行なわれる．この量を**有効制動**と呼ぼう（これをまた**エネルギー損失の断面積**とも呼ぶ）．

(82a.10) における積分は，2段階で行なうことができる．それは $\boldsymbol{p}$ に対する $\boldsymbol{p}'$ の方位

1）この損失は原子の電離だけでなく励起と関係しているけれども，これはしばしば電離損失と呼ばれる．

角についての平均と，そのあとでの $do' \cong 2\pi\vartheta\, d\vartheta$ についての積分である．ここで ϑ は小さい散乱角である．最初の操作は $\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_{n0}$ を

$$\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}_{n0} \to q_{\parallel} x_{n0} = -\frac{\omega_{n0}}{v} x_{n0}$$

に置き換える．ここで x_{n0} は原子内電子のデカルト座標中の一つの行列要素である[1]．$d\vartheta$ についての積分は，q^2 についての積分に換えることができる．それには

$$-q^2 = -\omega_{n0}^2 + \boldsymbol{q}^2 \approx -\omega_{n0}^2 + \frac{\omega_{n0}^2}{v^2} + \boldsymbol{p}^2\vartheta^2 = \frac{\omega_{n0}^2 M^2}{\boldsymbol{p}^2} + \boldsymbol{p}^2\vartheta^2 \qquad (82a.11)$$

であり，したがって $2\vartheta\, d\vartheta = d|q^2|/\boldsymbol{p}^2$ であることに気がつけばよい（M は速い粒子の質量である）．結果として

$$\kappa = 4\pi(ze^2)^2 \sum_n \int \left\{ |(e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}})_{n0}|^2 \frac{\omega_{n0}}{v^2} - \omega_{n0}^3 |x_{n0}|^2 \left(\frac{M^2}{\boldsymbol{p}^2} + \frac{1}{v^2} \right) \right\} \frac{d|q^2|}{|q^2|^2} \qquad (82a.12)$$

を得る．

q^2 についての積分の下限は

$$|q^2|_{\min} = \frac{M^2}{\boldsymbol{p}^2}\omega_{n0}^2 \qquad (82a.13)$$

である．上限としては

$$I \ll \frac{|q^2|_1}{m} \ll m \qquad (82a.14)$$

であるようなある値 $|q^2|_1$ を選ぼう．すなわち領域 I および II (82a.1) の重なり合う領域に存在する．

(82a.12) における積分と和は，III，§146 で非相対論的な場合に対して行なわれたのと同様に行なわれる．すべての積分をさらに二つの部分に分ける．すなわち，a) $|q^2|_{\min}$ から $|q^2|_0$ まで，および b) $|q^2|_0$ から $|q^2|_1$ までである．ここで $|q^2|_0$ の値は

$$\frac{IM}{|\boldsymbol{p}|} \ll \sqrt{|q^2|_0} \ll m\alpha \qquad (82a.15)$$

のようなものである（右にある量 $m\alpha$ は，原子内電子の運動量の程度の大きさである）．領域 a) では $e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} \cong 1 - i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}$ の展開をすることができる．この領域から κ への寄与はつぎの形になる．

1) どうでもよいことだが，あとで終状態の原子の角運動量の方向について加えることを暗に了解していれば，行列要素 x_{n0} はもう軸 x の方向にはよらない．

$$4\pi(ze^2)^2\sum_n\int_{|q^2|_{\min}}^{|q^2|_0}\left\{\frac{1}{v^2}\omega_{n0}|x_{n0}|^2\frac{1}{|q^2|}-\frac{M^2}{p^2}\omega_{n0}^3|x_{n0}|^2\frac{1}{|q^2|^2}\right\}d|q^2|$$
$$\approx\frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\left[\ln\frac{|q^2|_0 p^2}{M^2\omega_{n0}^2}-v^2\right]$$

（第 2 項における積分は，無限大まで伸ばしてもよい）．

和は公式

$$\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2=\frac{1}{2m}Z \tag{82a.16}$$

を使って行なわれる．ここで Z は原子内電子の数である（III（146.10）参照）．結果をつぎの形に表わすことにしよう．

$$\frac{2\pi(ze^2)^2Z}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_0 p^2}{M^2I^2}-v^2\right]. \tag{82a.17}$$

ここで I はつぎの公式で定義される平均の原子エネルギーである．

$$\ln I=\frac{\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\ln\omega_{n0}}{\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2}=\frac{2m}{Z}\sum_n\omega_{n0}|x_{n0}|^2\ln\omega_{n0}. \tag{82a.18}$$

領域 b）では（82a.11）にしたがって $|q^2|\approx p^2\vartheta^2$ が成り立つ．すなわち $|q^2|$ は原子の終状態の番号 n によらない．したがって，（82a.12）における n についての和は積分記号の内で行なうことができる．第 1 項は，公式

$$\sum_n|(e^{-iqr})_{n0}|^2\omega_{n0}=\frac{Z}{2m}q^2 \tag{82a.19}$$

によって実現される（III（146.5）参照）．そしてこの積分は

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\ln\frac{|q^2|_1}{|q^2|_0}$$

に等しい[1)]．（82a.12）の第 2 項の，この領域での積分は κ に対して無視しうる寄与しかしない．

最後の公式を（82a.17）と一緒にして，運動量転移が小さい領域全部からの κ への寄与を求めることができ

$$\frac{2\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left[\ln\frac{|q^2|_1 p^2}{M^2I^2}-v^2\right] \tag{82a.20}$$

となる．

1）（82a.12）のなかの第 1 項で e^{-iqr} を q で展開をしてはいけなかった原因は，積分の上限での対数発散である．

B.　大きい運動量転移

原子内電子の運動量にくらべて大きい運動量転移を伴う衝突に進もう ($\boldsymbol{q}^2 \gg mI$)．この領域では，明らかに，原子内電子の結合エネルギーを無視すること，すなわちそれを自由電子と考えることができる．これに対応して原子と高速粒子との衝突は，それと Z 個の原子内電子のおのおのとの弾性衝突となるであろう．このとき粒子の速度が大きいので，原子内電子ははじめ静止していると見なすことができる．

高速粒子から原子内電子に与えられたエネルギーを $m\Delta$ と置こう．そして $d\sigma_\Delta$ をこのような転移を伴う弾性散乱の断面積としよう．全原子の微分有効断面積はこのとき

$$d\kappa = Zm\Delta\, d\sigma_\Delta \tag{82a.21}$$

となる．

静止電子に，それと衝突する質量 $M \gg m$ の粒子から与えられる最大エネルギーは

$$m\Delta_{\max} = \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{m^2 + M^2 + 2m\varepsilon} \approx \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{M^2 + 2m\varepsilon}$$

である．ここで ε および $\boldsymbol{p}$ は跳び去る粒子のエネルギーおよび運動量である (II (13.13) 参照)．さらに，エネルギー ε は超相対論的である ($\varepsilon \gg M$) けれども，同時に

$$\varepsilon \ll \frac{M^2}{m} \tag{82a.22}$$

を満足すると仮定しよう．このとき最大のエネルギー転移

$$m\Delta_{\max} \approx \frac{2m\boldsymbol{p}^2}{M^2} = 2mv^2\gamma^2 \qquad (\gamma = \varepsilon/M = 1/\sqrt{1-v^2}) \tag{82a.23}$$

でさえも，入射粒子の始めの運動エネルギーにくらべればまだ小さい ($m\Delta_{\max} \ll \varepsilon - M$)．したがって，運動量転移 $\boldsymbol{q}$ はいつも粒子の初めの運動量 $\boldsymbol{p}$ にくらべると小さいままである．この事情があるので，入射粒子の運動は衝突の際に不変である，すなわち無限に重いと考えてもよい．このとき散乱断面積は，不動中心による電子散乱 (81.7) を電子が初め静止している実験室系への単なる変換として求められる．これは上述の近似では

$$-q^2 \approx \boldsymbol{q}^2 = 4\boldsymbol{p}^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}, \quad do' = \frac{\pi d\,|q^2|}{\boldsymbol{p}^2}$$

で，二つの系における相対速度は同じ v であることに気がつけば，容易に行なうことができる．公式 (81.7) は

$$d\sigma = \frac{4\pi(ze^2)^2}{v^2}\left(1 - \frac{|q^2|}{4m^2\gamma^2}\right)\frac{d\,|q^2|}{|q^2|}$$

の形になる．エネルギー移動 Δ は $-q^2 = 2m^2\Delta$ にしたがって同じ不変量 q^2 を使って表

わすことができる．したがって

$$d\sigma_{\Delta} = \frac{2\pi (ze^2)^2}{m^2 v^2}\left(1 - v^2 \frac{\Delta^2}{\Delta^2_{\max}}\right)\frac{d\Delta}{\Delta^2} \tag{82a.24}$$

となる[1]．

運動量転移のいま考えられている領域からの有効制動への寄与は，前に導入した限界 $|q^2|_1$ から $|q^2|_{\max} = 2m^2\Delta_{\max}$ までの範囲で（82a.21）を積分することによって得られる．それは

$$\frac{2\pi (ze^2)^2 Z}{mv^2}\left(\ln^2 \frac{2\Delta_{\max} m^2}{|q^2|_1} - v^2\right) \tag{82a.25}$$

に等しい．

最後に，寄与（82a.20）と（82a.25）を一緒にして，重い高速粒子の全電離損失に対するつぎのような最終的な結果を得る．すなわち（普通の単位で）

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2}\left(\ln \frac{2mv^2}{I\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{82a.26}$$

である．非相対論的な場合には，これから前の公式 III（147.10）が得られる．すなわち

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)^2}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I} \tag{82a.27}$$

である．また超相対論的な場合には

$$\kappa = \frac{4\pi Z(ze^2)}{mc^2}\left(\ln \frac{2mc^2}{I\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - 1\right) \tag{82a.28}$$

となる．制動はただ高速粒子の速度だけに依存する（質量には依存しない）．速度が大きくなったときの制動の減少（82a.27）は，超相対論的領域のゆるやかな（対数的）増大に変わる．

問　　題

1. 相対論的電子の有効制動を求めよ．

解 運動量転移の小さい領域は前と同様に（82a.20）で与えられる．運動量転移の大きい領域に対しては交換効果を考慮して（82a.24）の代りに公式（82a.14）を利用する必要

1）この公式ではもちろん，重い粒子がハドロンでなければ，強い相互作用の特有の効果は考慮されない．しかしながらこれらの効果（ハドロンの形状因子）は，$|q^2| \backsim 1/M^2$ のときにのみ重要になり，また条件（82a.22）のときはこのような運動量転移は除かれる．

がある．$\Delta\, d\sigma_\Delta$ を，$d\Delta$ について $|q|_1^2/2m^2$ から $(\gamma-1)/2$ まで積分し，(82a.20) と一緒にして

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mv^2}\left[\ln\frac{m^2(\gamma^2-1)(\gamma-1)c^4}{2I^2} - \left(\frac{2}{\gamma}-\frac{1}{\gamma^2}\right)\ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{(\gamma-1)^2}{8\gamma^2}\right], \quad (1)$$

$$\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$$

を得る．非相対論的な場合にはⅢ，§146の問題の式が得られ，超相対論的な場合 $(\gamma \gg 1)$ には

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{m^2c^4\gamma^3}{2I^2} + \frac{1}{8}\right) \quad (2)$$

が得られる．

2. 陽電子について同じことを行なえ．

解 運動量転移の大きい領域の $d\sigma_\Delta$ に対しては，(82a.23) を使う必要がある．このとき $d\Delta$ についての上限は $\gamma-1$ に等しい．超相対論的場合の解は

$$\kappa = \frac{2\pi Ze^4}{mc^2}\left(\ln\frac{2m^2c^4\gamma^3}{I^2} - \frac{23}{12}\right)$$

である．

第1巻への訂正と追加

日本語版第1刷（1969年9月刊）に対する
訂正と追加．なおこれらは第3刷（1972年
6月刊）以降ではすべて訂正済みである．

頁	行	誤	正
v	↑ 5	$\hbar/m_pc = 1.321 \cdot 10^{-13}$ cm	$\hbar/m_pc = 2.102 \cdot 10^{-14}$ cm
16	↑ 3	必要な	正しい
18	↓ 5	$\mathrm{c}_{k\alpha}$, $\mathrm{c}^*_{k\alpha}$	$c_{k\alpha}$, $c^*_{k\alpha}$
23	↓ 9	§59	§58
33	↑ 12	密度行列ゲージ	密度行列のゲージ
35	↓ 7	双偶	対偶
41	↓ 2, 1	同じ方法で ψ あるいは ψ_μ の定義を変えることがつねに可能だ	ψ あるいは ψ_μ の定義を変えることによってつねに同じにすることができる
42	↓ 14	L	ψ
54	↑ 10	発展に関するもの	概念の自然な発展
55	↑ 8	ψ^*	ψ^+
57	↑ 1	混合成分（ψ^{0i}）	混合成分（ψ^{ik}）
58	↑ 14	ψ_{0i}	ψ_{ik}
	↑ 13	スピン 0	スピン 1
61	↓ 14	第1項の前の符号	符号
71	↑ 10	$+1/2$ および $-1/2$ の z－投影の固有値	の z－投影の固有値 $+1/2$ および $-1/2$
75	↑ 1	$\mathrm{s} =$	$\mathbf{s} =$
79	↑ 1	$\dot{\eta}^\alpha$	$\eta^{\dot{\alpha}}$
80	↓ 5	$\dot{\eta}^\alpha$	$\eta^{\dot{\alpha}}$

頁	行	誤	正
82	↓ 1	同等	同値
83	↓ 2	同等	同値
87	↓ 5	$p_\mu \gamma^\mu_{ik}\psi_k$	$p_\mu \gamma^\mu_{ik}\psi_k$
87	↓ 11	$-i\boldsymbol{\gamma}\nabla$	$+i\boldsymbol{\gamma}\nabla$
90	↓ 2	$\alpha_i\alpha_k+\alpha_k\alpha_i$	$\alpha_i\alpha_k+\alpha_k\alpha_i$
		$\boldsymbol{\nu}$	$\boldsymbol{\alpha}$
92	↑ 4	$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\mu\gamma^\nu$	$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu$
98	↓ 8	$\dfrac{p\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon-m}$	$\dfrac{p\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon+m}$
100	↓ 7	$e^{-\frac{\varphi}{2}n\alpha}$	$e^{-\frac{\varphi}{2}n\varphi}$
		$-\nu\boldsymbol{\alpha}$	$-\nu\alpha$
111	↑ 8 ↑ 6 ↑ 4 ↑ 1		∇ を含む項の符号を変える
118	↓ 2	演算子の形式	演算子の双1次形式
119	↓ 2	残りの形式	残りの双1次形式
129	↑ 3	方程式（29.1）	方程式（30.1）
141	↓ 13	$-\dfrac{e}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}$	$-\dfrac{e\hbar}{2mc}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}$
145	↓ 2	$-\dfrac{\alpha\mathbf{p}^4}{8m^3}$	$-\dfrac{\mathbf{p}^4}{8m^3}$
159	↓ 4	力の中心の場	中心力場
167	↓ 6	球面展開	球面波展開
168	↓ 9	$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime}$	$\partial_\mu A^\mu = k_\mu A^{\mu\prime} = 0$
169	↓ 4	$p_1 = -i\dfrac{\partial}{\partial x^1},\quad p_2 = -i\dfrac{\partial}{\partial x^2}$	$p_1 = i\dfrac{\partial}{\partial x^1},\quad p_2 = i\dfrac{\partial}{\partial x^2}$
174	↓ 11	$eF^{\mu\nu}u$	$eF^{\mu\nu}u_\nu$
	↓ 12	III，§23	II，§23
177	↓ 12	$-\dfrac{2\mu+2\mu'(\varepsilon-m)}{\varepsilon}$	$-\dfrac{2\mu m+2\mu'(\varepsilon-m)}{\varepsilon}$
192	↓ 10	$\dfrac{1+\cos^2\theta}{2}$	$\dfrac{1+\cos^2\theta}{2}do$

頁	行	誤	正
204	↓ 9	$\overline{Q_{ik}^2}=\frac{3Q^2}{2J^2(2J-1)^2}\boldsymbol{J}^2(4\boldsymbol{J}^2-3)$ $=Q^2\frac{3(J+1)(2J+3)}{2J(2J+1)}$	$\overline{Q_{ik}^2}=\frac{6Q^2}{J^2(2J-1)^2}(\bar{\boldsymbol{J}}^2)^2$ $=\frac{6(J+1)^2}{(2J-1)^2}$
	↓ 12	$\langle J\Vert Q\Vert J\rangle$ $=Q\sqrt{\frac{3(2J+1)(J+1)(2J+3)}{2J(2J-1)}}$	$\langle J\Vert Q\Vert J\rangle$ $=\frac{Q(J+1)\sqrt{6(2J+1)}}{2J-1}$
	↓ 16	$\sqrt{\frac{10J(2J-1)}{3(J+1)(2J+3)}}$	$\frac{\bar{Q}_{ik}}{Q}\sqrt{\frac{5}{6}}\frac{2J-1}{J+1}$
212	↓ 1	微細	超微細
228	↓ 12	純回転遷移	純回転性遷移
233	↑ 12	ψ_p	$\psi_{\bar{p}}$
	↑ 6	$\psi=$	$\psi'=$
248	↓ 6	$(\boldsymbol{\alpha e})$	$(\boldsymbol{\alpha e}^*)$
	↑ 12	$e^{i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_1}$	$e^{i\xi\boldsymbol{k}\mathbf{r}_2}$
258	↑ 11	III, §42	II, §42
267	↑ 8	$+\frac{1}{6}G_{21}^a(1-\|\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}\|^2)\}.$	$+\frac{1}{6}G_{21}^a(1-\|\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}\|^2)\}\,do.$
271	↑ 3	$[(z+1)^2-\gamma^2]$	$[(z^2+1)^2-\gamma^2]$
277	↑ 14	$\sim 1/\Gamma(=\hbar/\Gamma)$	$\sim\Gamma(=\Gamma/\hbar)$
280	↓ 8	(63.3)	(63.1)
284	↓ 10	偏りのテンソル	分極率テンソル
289	↓ 10, 11	(散乱のないは	(散乱のない) は
293	↓ 8	$\|M_{fi}\|$	$\|M_{fi}\|^2$
300	脚注		〔281頁 *) のように訂正〕
312	↑ 4	$D_{\Lambda M}^{(J)}(-\boldsymbol{n})$	$D_{\Lambda M}^{(J)}(-\boldsymbol{n})\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}$
320	↓ 13	$-\bar{u}'\tilde{\mathrm{U}}_T\mathrm{U}^+u$	$-\bar{u}'\tilde{\mathrm{U}}_T\mathrm{U}_T^+u$
329	↑ 6	$\sum_m V_{nm}$	$\sum_m C_m V_{nm}$
344	↑ 12	ψ_k^* を	ψ_k^* と
351	↑ 3	$\frac{1}{k^2}$	$\frac{1}{k^2-m^2}$
358	↑ 8		〔281頁 **) のように訂正〕

頁	行	誤	正
361	↓ 6	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
372	↑ 5	$4\pi e^2$	$4\pi e^4$
375	↑ 12	(82.4)	(82.5)
376	↓ 5	$\frac{r_e}{16}$	$\frac{r_e^2}{16}$
395	↑ 2	同程度（および	同程度の（および
403	↑ 7	スピール	スピノール
410	↑ 13	$Q_{\mu\nu}$	$\bar{Q}_{\mu\nu}$
414	↓ 11	$d\sigma^{\top}$	$d\sigma_{\perp}$
415	↑ 5	$\xi_2 f\zeta$	$\xi_2 f\zeta\, do'$
420	↓ 4	do	$r_e^2 m^2\, do$
424	↓ 13	p^+	p_+
425	↑ 9	$\frac{8e^6}{v}$	$\frac{8e^6}{vm^2}$
	↑ 1	$\frac{8e^6}{3v}$	$\frac{8e^6}{3vm^3}$
426	↓ 10	$\frac{4e^6}{3v}$	$\frac{4e^6}{3vm^2}$
435	↓ 6	II，§70	II，§69
437	↓ 4	$A_0^{(e)}(q)$	$A_0^{(e)}(\mathbf{q})$
	↓ 8	$A_0^{(e)}(q)$	$A_0^{(e)}(\mathbf{q})$
451	↓ 12～14	Q, $\bar{Q}$	$\mathbf{Q}$, $\bar{\mathbf{Q}}$
454	↑ 10	$2\cdot 2\pi\, dz$	$2A\cdot 2\pi\, dz$
455	↓ 9, 10	変化は対数から原子番号の普遍的関数 $f(\alpha Z)$	変化は原子番号の普遍的関数 $f(\alpha Z)$ の対数から
	↑ 4	不変換	交叉変換
457	↓ 8	p_2 と p_2'	p_1' と p_2'
463	↑ 2	$e^M \longrightarrow$	$e \longrightarrow$
475	↑ 13	$\left(4-\frac{m}{\omega'^2}+\frac{m^2}{4\omega'}\right)$	$\left(4-\frac{m}{\omega'}+\frac{m^2}{4\omega'^2}\right)$
479	↓ 3	$\mathbf{Q}u_+$	Qu_+

*) 300頁の脚注をつぎのように変える.

1) $n \geq 4$ 個の粒子が反応に参加する一般の場合には，関数的に独立な不変変数の数は $3n-10$ である．実際に，全部で $4n$ 個の量，すなわち n 個の 4－運動量 q_a の成分がある．これらのあいだには n 個の関数関係 $q_a^2 = m_a^2$，および4個の保存則 $\sum_{a=1}^{n} q_a = 0$ が成立する．6個の量，一般のローレンツ変換（一般の4次元回転）を定義するパラメータの数に対応した6個の量には任意の値を与えることができる．したがって独立不変変数の数は $4n-n-4-6 = 3n-10$ に等しい．

**) 358頁の8）の末尾につぎの文を付け加える.

もしも場が定場ならば，外線には 4－運動量 $q^\mu = (0, \boldsymbol{q})$ がつけられ，それには場の3次元フーリエ成分 $A^{(e)}(\boldsymbol{q})$（この場合には $A^{(e)}(q) = 2\pi\delta(q^0)A^e(\boldsymbol{q})$ にしたがって4次元成分と結びついている）が対比される．残りの内線の不定3次元運動量ごとに $d^3p(2\pi)^3$ についての積分が行なわれる．

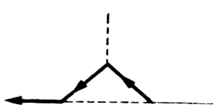
その他の追加訂正

335頁　↓1, 2　(74.8)式をつぎのように訂正；

$$(74.5) = a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+ + a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi')a_2^+a_1^+$$

$$+ a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+ + a_3a_4(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)(\bar{\psi}'\gamma^\nu\psi')a_2^+a_1^+.$$

354頁　↓20　右辺の図をつぎのように訂正；



358頁　↓6　$u(-p)$ を $\bar{u}(-p)$ に訂正.

第1巻の人名索引

ア 行

カ 行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ 行

マ 行

ヤ 行

ラ　　行

ワ　　行

第2巻の事項索引

ア　行

カ　行

サ　行

ナ　行

ハ　行

訳者あとがき

本書は E.M. Лифшиц, Л.П. Питаевский《Релятивистская квантовая теория, ч. 2》の翻訳であり，1969年秋に東京図書から訳書が刊行された《相対論的量子力学 1》の続篇である．

第1巻の訳書が原著者の一人リフシッツ教授のもとに送られた際，同教授から折り返し，これがこの本の最初の外国語訳であることを喜んでおられ，と同時にこの原書には非常に沢山の変更訂正箇所があり，訳書刊行前に連絡できなかった点が残念であることを述べられた手紙を頂いた．これらの膨大な変更訂正箇所は表になって原書第2巻の巻末に載せられている．第1巻の日本語版，第3刷（1972年6月）以降はこれにしたがった改訂が行なわれているが，第1刷，第2刷ではそれが行なえなかった．第1，2刷を入手された方には申しわけなく思っているが，これらの変更訂正は本訳書の巻末に“第1巻への訂正と追加”としてまとめて収められている．

第2巻に関しても昨年6月に原書が刊行された直後，リフシッツ教授より訂正加筆された原書が送られ，その後も数回にわたって訂正削除の追加の手紙を頂いた．本訳書はその指示にしたがって削除，訂正を行なったものであり，現在市販されているロシア語原書とかなり違っている箇所もある．明らかに校正もれの誤植と思われるものを訳者の判断で訂正した以外は，原書を忠実に訳出することに努めた．なお《ток》の訳語には，第13章までは第1巻に合わせて《電流》を用い，その他の場合には《カレント》を用いた．

本書の意図するところは“まえがき”に述べられていて，特に付け加えることはないが，第1巻につづいて量子電気力学の高次の取り扱いの詳細な解説が中心になっている．高次近似の際に現われる発散と，それを除いて意味のある結果を導くいろいろな手法について解説し，たえず現在の量子論の限界を見つめながら議論が進められる．特に1955年頃，ランダウを中心としてアブリコソフ，ハラトニコフ等がくりひろげた場の量子論の限界についての仕事が一章を設けて論じられている点は本書の特色であろう．量子電気力学

以外についても，本書の“まえがき”で著者達が述べているように，特に基本的であり教育的な内容をもつものを選んで解説がなされている．力学的対称性の問題にしても，この分野の最近の膨大な成果のなかからハドロンのアイソスピン，$SU(3)$ の対称性の解説に限っている．また現象論に限り，中間子論による核力の問題などにも触れていない．基礎の比較的しっかりしている量子電気力学を通じて，相対論的量子力学の基礎理論の解説が行なわれている．

本訳書の刊行によって，ランダウ＝リフシッツ「理論物理学教程」の既刊のものはすべて邦訳されたことになる．そして，今なお原著未刊の本教程最終巻《Физическая кинетика》も目下準備中であるとの連絡をリフシッツ教授から頂いており，まもなくこれも日本の読者に紹介できるであろう．

日ソ間の交流が今ほど盛んでなく，原書が入手しにくかった時期に始まったこの仕事も漸く大詰めに近づいてきた．本教程の部分的に大幅な改稿も計画にのぼったようであるが，途中ランダウの不慮の事故に遭い，原書の刊行もとだえがちになったこともあった．この《相対論的量子力学》でも執筆者名のなかからランダウの名が消えている．ランダウ自身の仕事が比較的たくさん盛り込まれた本書が刊行されるときに，ランダウ自身の参加を欠いたことを誠に残念と思うのはひとり訳者だけではないと思う．

本訳書の完成に当たって，都立大学理学部大学院D加藤一男君，日本大学理工学部大学院D山崎康人君にいろいろと援助して頂いたことを感謝します．また東京図書の松本重彰さんには，第1巻のときと同様に非常な熱意で本書の完成を助けていただいたことを感謝します．

1972年　夏

井　上　健　男

訳者紹介

井上健男（いのうえ たけお）

1942年　東京大学理学部物理学科卒業
　　　　同大学工学研究所助手を経て，
現　在　日本大学文理学部教授
　　　　原子核理論専攻

ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程

相対論的量子力学 2

1972年9月14日　第1刷発行

著　者　イェ・リフシッツ
　　　　エリ・ピタエフスキー
訳　者　井上健男
発行所　**東京図書株式会社**
本　社　東京都新宿区本塩町23　タナカビル
　　　　振替 東京 13803 電話(357)0636～7
営業所　東京都文京区水道1—8—1
　　　　電話 (814) 7818～9

3342-3108-5160